



FORMATO DE RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

Elaborado por:
2200293 – Jhan Carlos Matajira Figueroa

Ejercicios 1-14

Temas

**Centroides, momentos de inercia, momento polar de inercia, producto de inercias,
Inercias máximas, DFC, DMF, DFA.**

Revisión
HOMER ARMANDO BUELVAS MOYA
JHAN CARLOS MATAJIRA FIGUEROA


UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Estática – 23018

Grupo

Escuela de Ingeniería Civil

2024

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

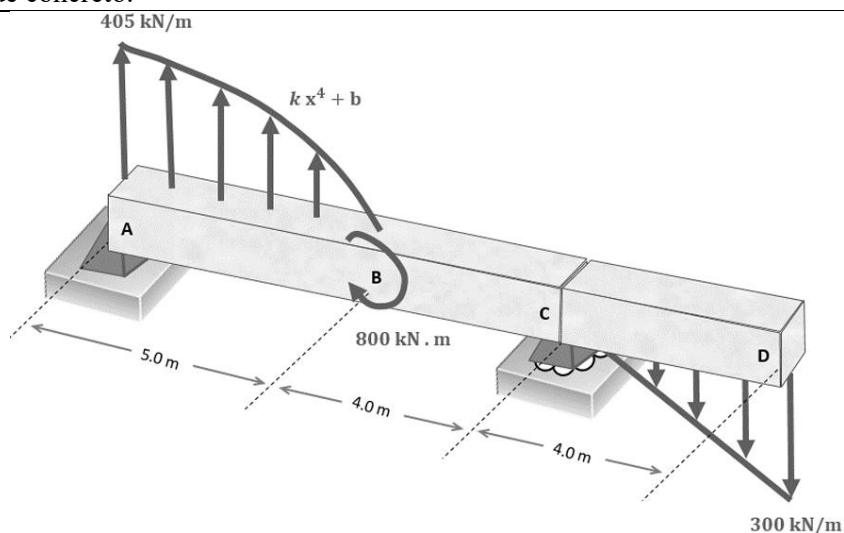
EJERCICIO 1

La siguiente viga ABCD posee dos cargas distribuidas y un momento aplicado que genera equilibrio en los apoyos A y C. Resolviendo el equilibrio externo de la viga ((0.5 pts.)) y trasladando la viga al plano XY del papel, determine:

- El DFC con su respectivo máximo.
- El DMF con sus respectivos máximos.

Figura 1

Viga inclinada de concreto.




Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

- Nota 1: La viga ABCD es continua en todos los puntos, hasta en la unión rígida de la sección transversal C.

Solución 1

Interpretando el ejercicio vemos que la viga ABCD está siendo sometida por dos fuerzas externas distribuidas en el eje y tanto en el tramo AB como en el CD. Además de un momento puntual en B. Teniendo en cuenta esto, podremos llegar a esperar una reacción más grande en el punto A que en C debido a que el punto A recibe mayor impacto de carga. Y probablemente vaya en sentido “y” negativo.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY debido a que está contenida la viga y las cargas en el plano XY.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

1.1. Identificación de apoyos

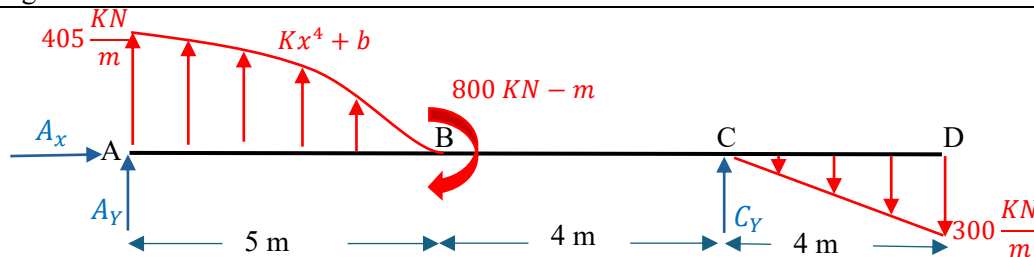
En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo A se identifican un apoyo de segundo orden donde se garantiza una restricción en el eje Y positivo y en X. En el apoyo C se puede observar un apoyo de primer orden. Generando una viga que está completamente restringida.

1.2. Realizando un DCL

Realizando un DCL de la viga ABCD en el plano XY como se muestra en la Figura 2. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra viga en estudio.

Figura 2

DCL Viga ABCD



Nota. Autoría propia.

1.3. Hallando ecuaciones de carga


Como se observa en la **Figura 1** debemos hallar las ecuaciones que me describan cada una de las cargas a las que está sometida la viga.

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= Kx^4 + b \\
 W_1(0) &= 405 \rightarrow b = 405 \\
 W_1(5) &= 0 \rightarrow K = -0.648
 \end{aligned}$$

$$W_1(x) = -0.648x^4 + 405$$

Cómo se observa en la Figura 1 la segunda carga la describe una ecuación de primer orden. Tomando el tramo de izquierda a derecha

$$\begin{aligned}
 W_2(x) &= mx + b \\
 m &= \frac{300 - 0}{4 - 0} = \frac{300}{4} \\
 b &= 0 \\
 W_2(x) &= \frac{300}{4}x
 \end{aligned}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

1.4. Hallando carga puntual y su ubicación

Para puntualizar las cargas distribuidas sabemos que se hace por medio de sus áreas y teniendo en cuenta que las cargas se ubicarán en su centroide. Obtenemos lo siguiente:

Puntual de $W_1(x)$

$$P_{w1} = \int_0^5 -0.648x^4 + 405 \, dx = 1620 \, \text{KN} \quad \uparrow$$

Ubicación de $W_1(x)$

$$X_1 = \frac{\int_0^5 (-0.648x^4 + 405)x \, dx}{\int_0^5 -0.648x^4 + 405 \, dx} = 2.083 \, \text{m}$$

Puntual de $W_2(x)$

$$P_{w2} = \int_0^4 \frac{300}{4} x \, dx \quad \text{ó} \quad \frac{4\text{m} \times 300 \frac{\text{KN}}{\text{m}}}{2} = 600 \, \text{KN} \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_2(x)$

$$X_2 = \frac{\int_0^4 \left(\frac{300}{4} x\right) x \, dx}{\int_0^4 \frac{300}{4} x \, dx} \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3} \times 4 = 2.667 \, \text{m}$$

Por las tablas de centroides de figuras típicas sabemos que el centroide de un triángulo se encuentra en 1/3 de su base midiendo desde el punto con mayor área o 2/3 midiendo desde el punto con menor área.

1.5. Realizando equilibrio para hallar reacciones

Cómo ya se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a realizar equilibrio estático en 2D para la viga de estudio. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el A ya que tiene dos incógnitas o reacciones en dicho punto. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios.

$$\sum M_{z_A} = 0 \rightarrow 1620 \, \text{KN} * 2.083 \, \text{m} - 600 \, \text{KN} * (9\text{m} + 2.667 \, \text{m}) + C_y \times 9\text{m} - 800 \, \text{KN} * 9\text{m} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + C_y - 600 \, \text{KN} + 1620 \, \text{KN} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$


Resolviendo el sistema de ecuaciones 2x2 que nos queda finalmente.

$$C_y = 491.73 \, \text{KN} \quad \uparrow$$

$$A_y = -1511.73 \, \text{KN} \quad \downarrow$$

$$A_x = 0 \, \text{KN}$$

El signo contrario quiere indicarnos que la reacción va contraria a como la dibujamos en el DCL que se presenta en la **Figura 2**.

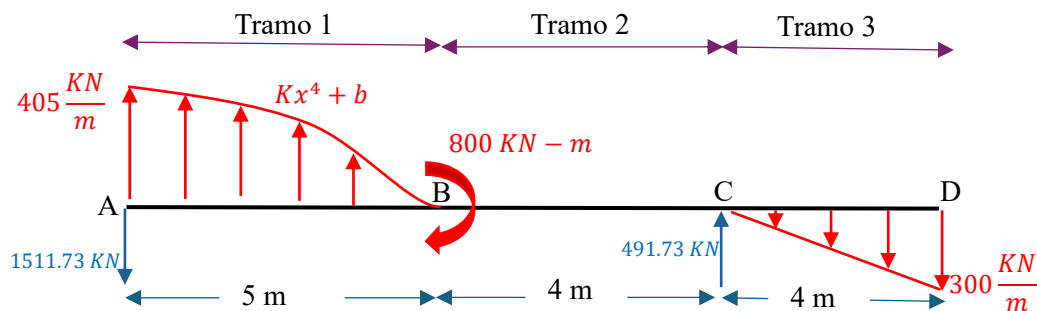
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

1.6. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos integrales, teniendo en cuenta que este método lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).

Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto que en la Figura 3 se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.

Figura 3
DCL Viga ABCD



Nota. Autoría propia.

1.6. Hallamos fuerzas internas

TRAMO AB $0 \leq x \leq 5m$

$$V_{AB}(x) = - \int -(-0.648x^4 + 405)dx - 1511.73$$


Colocamos el primer negativo de la ecuación y el segundo negativo debido a que la carga $W_1(x)$ va en dirección “y” positivo y la ecuación del método de integrales se realizó para cargas en dirección “y” negativo.

$$V_{AB}(x) = -\frac{0.648x^5}{5} + 405x - 1511.73$$

$$V_{AB}(0) = -1511.73 \text{ KN} \quad V_{AB}(5) = 108.27 \text{ KN}$$

$$V_{AB}(x) = 0 \rightarrow x = 4.106 \text{ m}$$

Hallamos el valor de “x” cuando el cortante es igual a cero. Debido a que en este punto el momento será máximo y para que el DFC quede lo mejor posible.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$M_{AB}(x) = \int -\frac{0.648x^5}{5} + 405x - 1511.73 \, dx$$

$$M_{AB}(x) = -\frac{0.648x^6}{30} + \frac{405x^2}{2} - 1511.73x$$

$$M_{AB}(0) = 0 \quad M_{AB}(5) = -2833.65 \, \text{KN} - m$$

$$M_{max} = M_{AB}(4.106) = -2896.67 \, \text{KN} - m$$

TRAMO BC $0 \leq x \leq 4m$

$$V_{BC}(x) = 108.27$$

$$V_{BC}(0) = 108.27 \, \text{KN} \quad V_{BC}(4) = 108.27 \, \text{KN}$$

$$M_{BC}(x) = \int 108.27 \, dx - (-800) + (-2833.65)$$

El primer menos del momento negativo de 800 se debe a que viene de la ecuación de momentos del método de integrales.

$$M_{BC}(x) = 108.27x - 2033.65$$

$$M_{BC}(0) = -2033.65 \, \text{KN} - m \quad M_{BC}(4) = -1600.57 \, \text{KN} - m$$

TRAMO CD $0 \leq x \leq 4m$

$$V_{CD}(x) = -\int \frac{300}{4}x \, dx + 491.73 + 108.27$$


$$V_{CD}(x) = -\frac{300}{8}x^2 + 600$$

$$V_{CD}(0) = 600 \, \text{KN} \quad V_{CD}(4) = 0 \, \text{KN}$$

$$M_{CD}(x) = \int -\frac{300}{8}x^2 + 600 \, dx + (-1600.57)$$

$$M_{CD}(x) = -\frac{300}{24}x^3 + 600x - 1600.57$$

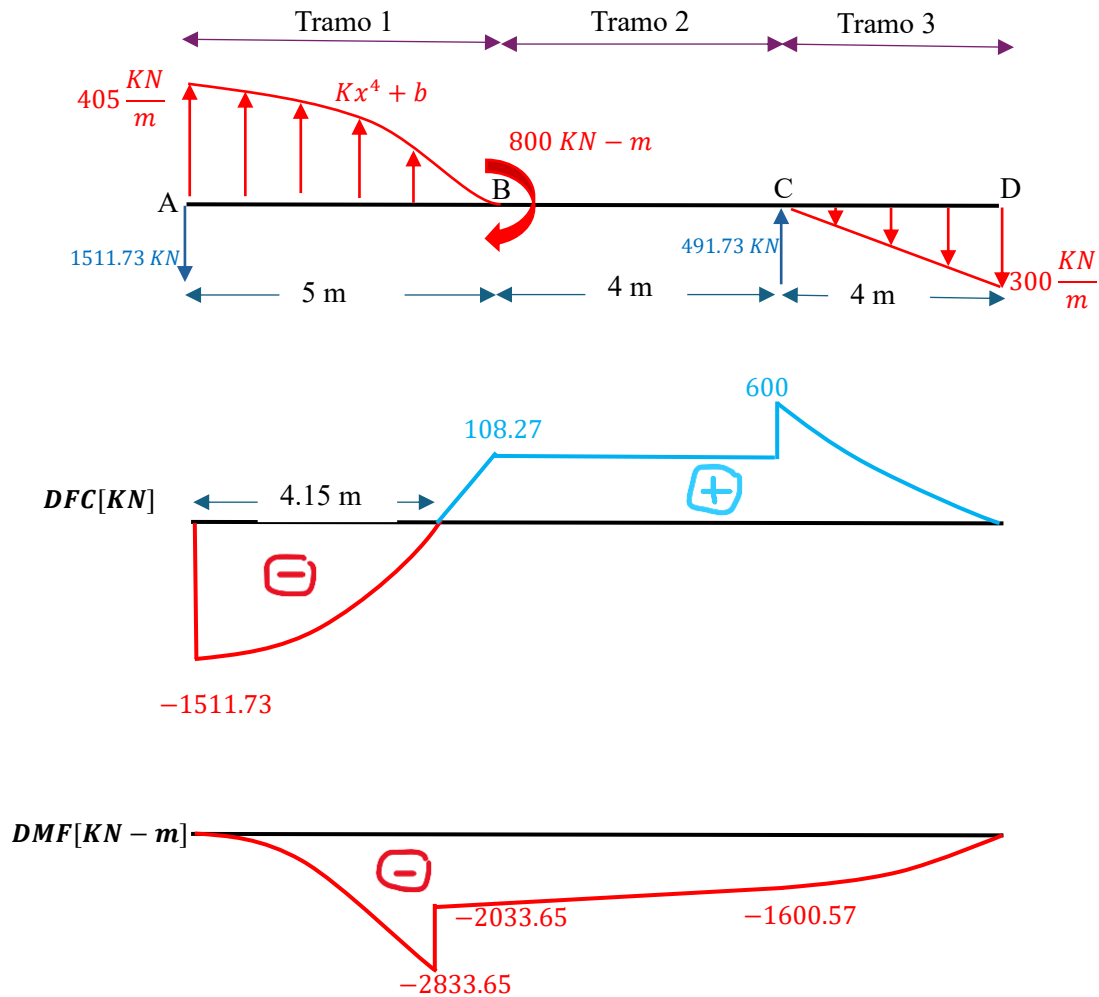
$$M_{CD}(0) = -1600.57 \, \text{KN} - m \quad M_{CD}(4) = -0.57 \, \text{KN} - m$$

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		


1.7. Hacemos DFC y DMF

Figura 4

DCL, DFC, DMF



Nota. Autoría propia.

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

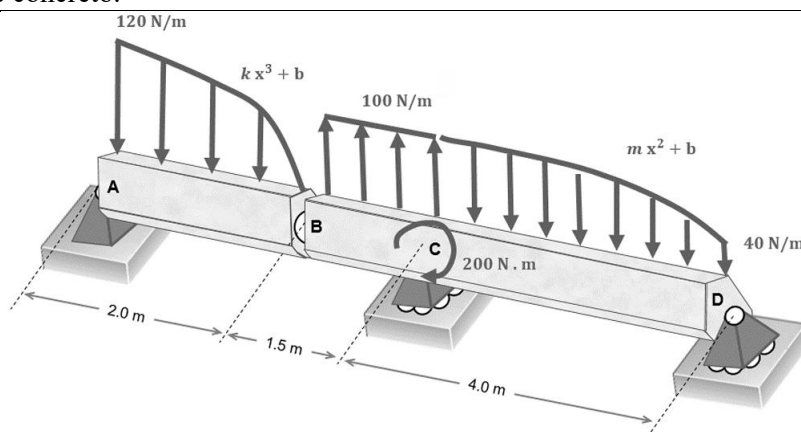
EJERCICIO 2

La siguiente viga con tres cargas distribuidas y momento puntual en C, se encuentra triplemente apoyada y en equilibrio mediante una rótula intermedia. De acuerdo con la figura inferior y trasladando la viga al plano XY del papel (ignore el peso propio), determine:

- El DFC con su respectivo máximo.
- El DMF con sus respectivos máximos.

Figura 1

Viga inclinada de concreto.



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

- Nota 1: La viga ABCD es continua en todos los puntos, hasta en la unión articulada en el punto B.


Solución 2

Interpretando el ejercicio vemos que la viga ABCD está siendo sometida por tres fuerzas externas distribuidas en el eje y tanto en el tramo AB como en el BC y CD. Además de un momento puntual en C. Teniendo en cuenta esto, podremos llegar a esperar una reacción más grande en el punto C que en D y A debido a que el punto C recibe mayor impacto de carga. Y probablemente vaya en sentido “y” negativo.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY debido a que está contenida la viga y las cargas en el plano XY.

2.1. Identificación de apoyos

En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo A se identifican un apoyo de segundo orden donde se garantiza una restricción en el eje Y positivo y en X. En el apoyo C y D se puede observar un apoyo de primer orden. Generando una viga que está completamente restringida. También nos damos cuenta de que

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

nuestra viga es hiperestática ya que tenemos 4 reacciones por hallar para las 3 ecuaciones que nos da el equilibrio estático en 2D.

Teniendo en cuenta que las cargas externas todas están en el eje “y” y que nuestra viga es completamente horizontal podemos deducir que nuestra viga en este caso no tendrá reacciones en el eje x, es decir valdrán cero. Por ende, el GIE queda:

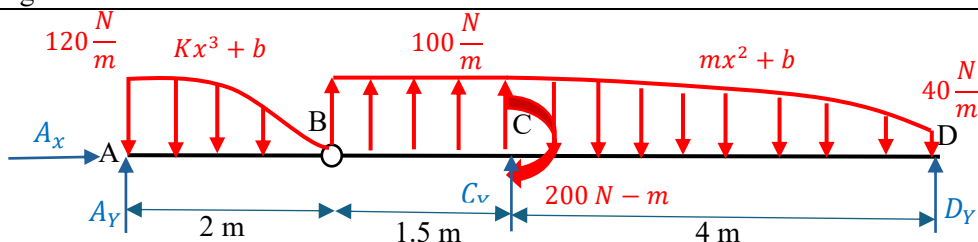
$$GIE = \text{reacciones} - \text{ecuaciones} = 3 - 2 = 1$$

2.2. Realizando un DCL

Realizando un DCL de la viga ABCD en el plano XY como se muestra en la Figura 2. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra viga en estudio.

Figura 2

DCL Viga ABCD



Nota. Autoría propia. La circunferencia en el punto B indica que hay una conexión articulada.

2.3. Hallando ecuaciones de carga


Como se observa en la **Figura 1** debemos hallar las ecuaciones que me describan cada una de las cargas a las que está sometida la viga.

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= Kx^3 + b \\
 W_1(0) &= 120 \rightarrow b = 120 \\
 W_1(2) &= 0 \rightarrow K = -15
 \end{aligned}$$

$$W_1(x) = -15x^3 + 120$$

Cómo se observa en la Figura 1 la segunda carga la describe una ecuación de primer orden. Tomando el tramo de izquierda a derecha

$$\begin{aligned}
 W_2(x) &= mx^2 + b \\
 W_2(0) &= 100 \rightarrow b = 100 \\
 W_2(4) &= 40 \rightarrow m = -6.25 \\
 W_2(x) &= -3.75x^2 + 100
 \end{aligned}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

2.4. Hallando carga puntual y su ubicación

Para puntualizar las cargas distribuidas sabemos que se hace por medio de sus áreas y teniendo en cuenta que las cargas se ubicarán en su centroide. Obtenemos lo siguiente:

Puntual de $W_1(x)$

$$P_{w1} = \int_0^2 -15x^3 + 120 dx = 180 N \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_1(x)$

$$X_1 = \frac{\int_0^2 (-15x^3 + 120)x dx}{\int_0^2 -15x^3 + 120 dx} = 0.8 m$$

Puntual de $W_2(x)$

$$P_{w2} = \int_0^4 -3.75x^2 + 100 dx = 320 N \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_2(x)$

$$X_2 = \frac{\int_0^4 (-3.75x^2 + 100)x dx}{\int_0^4 -3.75x^2 + 100 dx} = 1.75 m$$

Usamos las integrales para hallar los centroides y fuerzas debido a que no hay tablas o no hay manera de sacar el área de estas figuras de otra manera al ser polinomios diferentes a un grado.

2.5. Realizando equilibrio y despieces para hallar reacciones

Cómo nos dimos cuenta en el GIE la viga en estudio es hiperestática. Sin embargo, al haber una articulación en B se puede realizar un despiece de la viga donde vamos a poder analizar y realizar equilibrio en cada uno de estos despieces. Con la finalidad de hallar cada una de las reacciones.

De la misma manera ya que se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a iniciar realizando equilibrio estático en 2D en el despiece isostático como se muestra en la Figura 3. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el A ya que tiene dos incógnitas o reacciones en dicho punto. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios y que las reacciones en “x” son igual a cero debido a lo explicado en el inciso 1.1.

A continuación, se presenta el despiece de la viga (gracias a que está articulado en B), donde debemos tener en cuenta que al ser conexión articulada únicamente se transmitirán fuerzas y NO momentos. Además, debemos usar la tercera ley de Newton donde sabemos que al transmitirse la fuerza en B los 2 despieces van a tener igual magnitud de reacción en B pero sentidos contrarios.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$


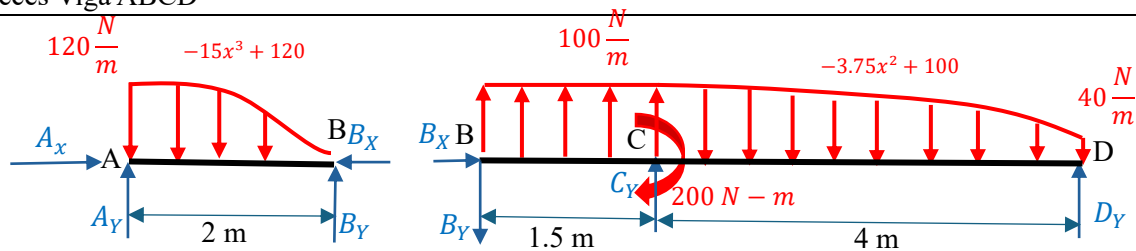
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 3

Despieces Viga ABCD



Nota. Autoría propia. Las reacciones en “x” son iguales a cero ya que $A_x = 0$.

Iniciamos realizando equilibrio en el despiece de la izquierda, debido a que es el despiece isostático ya que su GIE es igual a cero.

$$\begin{aligned}\sum M_{z_A} &= 0 \rightarrow -180 \text{ N} \cdot 0.8 \text{ m} + B_y \times 2 \text{ m} = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow A_y + B_y - 180 \text{ N} = 0 \\ \sum F_x &= 0 \rightarrow A_x - B_x = 0\end{aligned}$$

cResolviendo el sistema de ecuaciones 2x2 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned}A_y &= 108 \text{ N} \quad \uparrow \\ B_y &= 72 \text{ N} \quad \uparrow \\ B_x &= 0 \text{ N}\end{aligned}$$


Ahora realizando equilibrio en el despiece de la derecha, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum M_{z_C} &= 0 \rightarrow -100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 1.5 \text{ m} \times 0.75 \text{ m} + B_y \times 1.5 \text{ m} - 320 \text{ N} \times 1.75 \text{ m} + D_y \times 4 \text{ m} - 200 \text{ N} - \text{m} = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow C_y - B_y + D_y + 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 1.5 \text{ m} - 320 \text{ N} = 0 \\ \sum F_x &= 0 \rightarrow B_x = 0\end{aligned}$$

cResolviendo el sistema de ecuaciones 2x2 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned}D_y &= 191.125 \text{ N} \quad \uparrow \\ C_y &= 50.875 \text{ N} \quad \uparrow\end{aligned}$$

El signo contrario quiere indicarnos que la reacción va contraria a como la dibujamos en el DCL que se presenta en la **Figura 2**. No se cumple en este caso.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

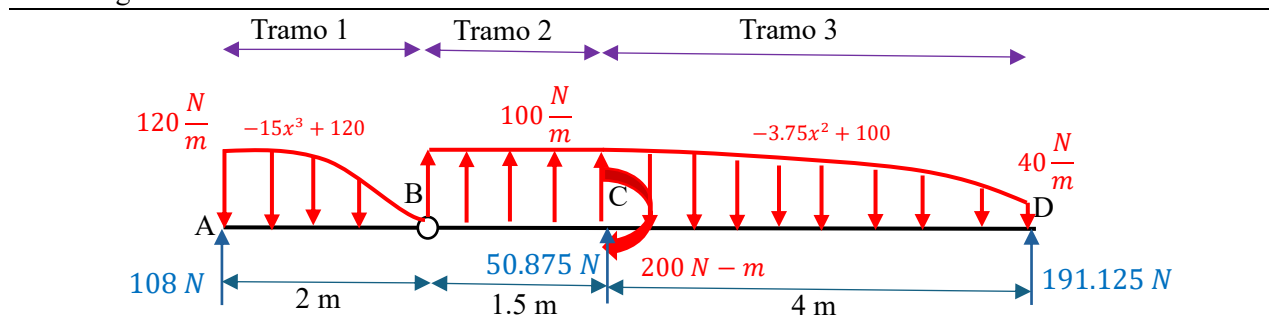
2.6. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos integrales, teniendo en cuenta que este método lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).

Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto por lo que en la Figura 4 se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.

Figura 4

DCL Viga ABCD Con tramos



Nota. Autoría propia. La circunferencia en el punto B indica que hay una conexión articulada.

2.6. Hallamos fuerzas internas

TRAMO AB $0 \leq x \leq 2m$

$$V_{AB}(x) = - \int (-15x^3 + 120) dx + 108$$

$$V_{AB}(x) = \frac{15}{4} x^4 - 120 x + 108$$

$$V_{AB}(0) = 108 \text{ N} \quad V_{AB}(2) = -72 \text{ N}$$


Hallando Cortante cuando vale cero $V_{AB}(x) = 0 \rightarrow x = 0.92 \text{ m}$

$$M_{AB}(x) = \int \frac{15}{4} x^4 - 120 x + 108 dx$$

$$M_{AB}(x) = \frac{15}{20} x^5 - 60 x^2 + 108 x$$

$$M_{AB}(0) = 0 \quad M_{AB}(2) = 0 \text{ N} - m$$

El momento en AB evaluado en 2 debe ser cero debido a que en este punto hay una rótula. Está correcto.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Hallando el momento máximo de este tramo $M_{AB}(0.92) = 49.07 \text{ N} - m$

TRAMO BC $0 \leq x \leq 1.5m$

$$V_{BC}(x) = - \int (-100) dx + (-72)$$

$$V_{BC}(x) = 100x - 72$$

$$V_{BC}(0) = -72 \text{ N} \quad V_{BC}(1.5) = 78 \text{ N}$$

Hallando Cortante cuando vale cero $V_{BC}(x) = 0 \rightarrow x = 0.72 \text{ m}$

$$M_{BC}(x) = \int 100x - 72 \, dx + 0$$

$$M_{BC}(x) = 50x^2 - 72x$$

$$M_{BC}(0) = 0 \text{ N} - m \quad M_{BC}(1.5) = 4.5 \text{ N} - m$$

Hallando el momento máximo de este tramo $M_{BC}(0.72) = -25.92 \text{ N} - m$

Hallando momento cuando vale cero $M_{BC}(x) = 0 \rightarrow x = 1.44 \text{ m}$

TRAMO CD $0 \leq x \leq 4m$

$$V_{CD}(x) = - \int -3.75x^2 + 100 \, dx + 50.875 + 78$$

$$V_{CD}(x) = \frac{3.75}{3}x^3 - 100x + 128.875$$

$$V_{CD}(0) = 128.875 \text{ N} \quad V_{CD}(4) = -191.125 \text{ N}$$


Hallando Cortante cuando vale cero $V_{CD}(x) = 0 \rightarrow x = 1.317 \text{ m}$

$$M_{CD}(x) = \int \frac{3.75}{3}x^3 - 100x + 128.875 \, dx - (-200) + 4.5$$

$$M_{CD}(x) = \frac{3.75}{12}x^4 - 50x^2 + 128.875x + 204.5$$

$$M_{CD}(0) = 204.5 \text{ N} - m \quad M_{CD}(4) = 0 \text{ N} - m$$

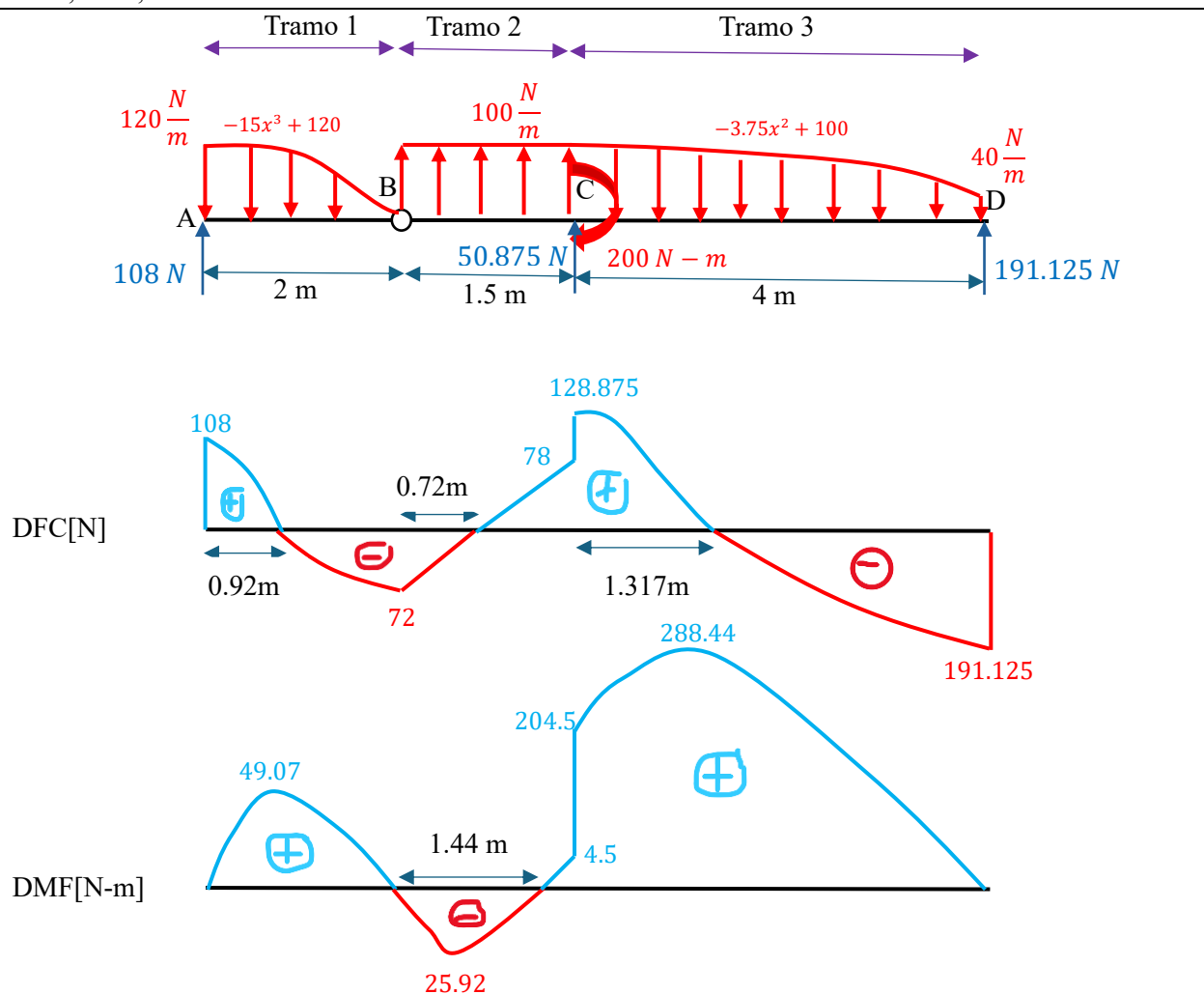
Hallando el momento máximo de este tramo $M_{CD}(1.317) = 288.44 \text{ N} - m$

 ESCUOLA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

2.7. Hacemos DFC y DMF

Figura 5


DCL, DFC, DMF



Nota. Autoría propia. La circunferencia en el punto B indica que hay una conexión articulada.

El cortante máximo se encuentra en el apoyo en D con un valor de 191.125 N.

El momento máximo se encuentra a 1.317 m del apoyo en C con un valor de 288.44 N-m positivo.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

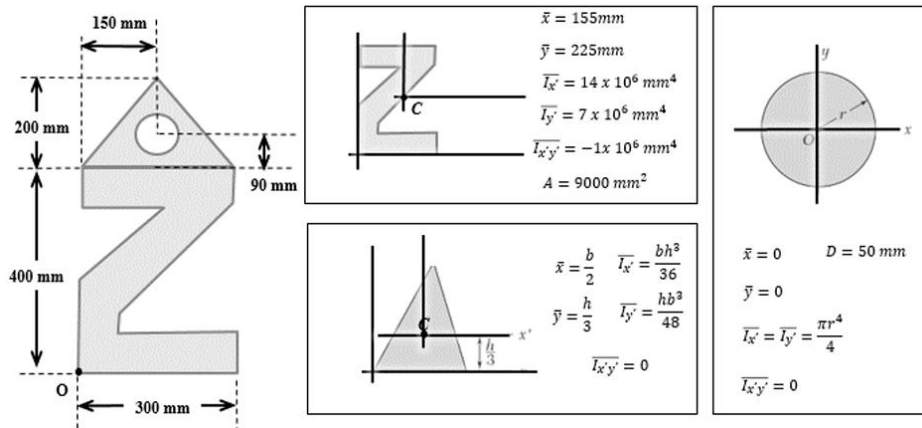
EJERCICIO 3

Para la siguiente sección transversal en forma de Z con una cubierta triangular y un hueco para un ducto eléctrico, halle:

- El cálculo del centroide de la sección transversal (\bar{x} , \bar{y})
- Los momentos de inercia (\bar{I}_x , \bar{I}_y , \bar{I}_{xy})
- Las inercias principales (I_{max} , I_{min})

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

Solución 3


Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal de un elemento estructural la cual es una sección compuesta. Por ende, debemos hallar cada uno de los ítems desde el punto de referencia O.

3.1 Hallamos centroides (\bar{x} , \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 2**.

$$\bar{x} = \frac{9000 \text{ mm}^2 \times 155 \text{ mm} + \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} \times \frac{300 \text{ mm}}{2} - \frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2 \times 150 \text{ mm}}{9000 \text{ mm}^2 + \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} - \frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2}$$

$$\bar{x} = 151.21 \text{ mm}$$

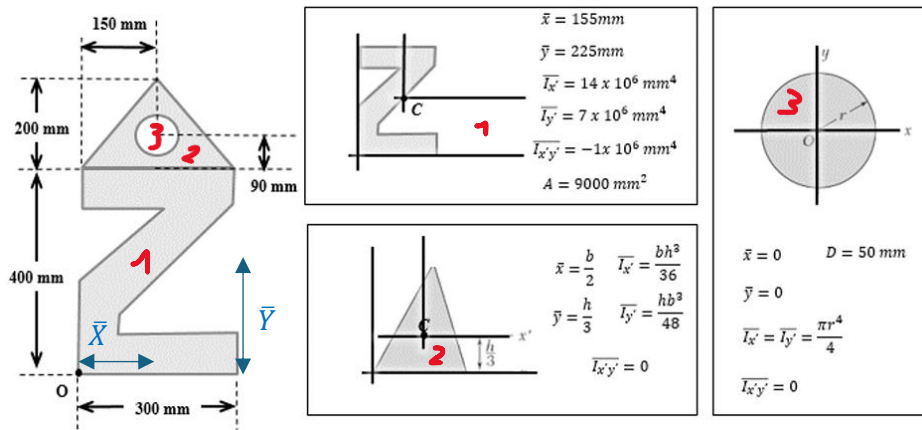
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$\bar{y} = \frac{9000 \text{ mm}^2 \times 225 \text{ mm} + \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} \times (400 \text{ mm} + \frac{200 \text{ mm}}{3}) - \frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2 \times (400 \text{ mm} + 90 \text{ mm})}{9000 \text{ mm}^2 + \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} - \frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2}$$

$$\bar{y} = 406.7 \text{ mm}$$

Figura 2

Centroides de la sección



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

3.2 Hallamos Momentos de inercia ($\bar{I}_x, \bar{I}_y, \bar{I}_{xy}$)

Como debemos hallar los momentos de inercia de nuestra sección debemos tener en cuenta las fórmulas de las tablas mostradas en la **Figura 2**, los centroides hallados en el inciso anterior y el teorema de Steiner debido a que nuestra sección se compone de varias figuras de diferente geometría unidas.


Por último, cabe resaltar que el momento de inercias en “x” usa distancias en “y” y viceversa.

$$\bar{I}_x = 14 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 9000 \text{ mm}^2 \times (225 \text{ mm} - 406.7 \text{ mm})^2 + \frac{300 \text{ mm} \times (200 \text{ mm})^3}{36} + \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} \times (466.67 \text{ mm} - 406.7 \text{ mm})^2 - \frac{\pi}{4} \times (25 \text{ mm})^4 - \frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2 \times (490 \text{ mm} - 406.7 \text{ mm})^2$$

$$\bar{I}_x = 471.761 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = 7 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 9000 \text{ mm}^2 \times (155 \text{ mm} - 151.21 \text{ mm})^2 + \frac{200 \text{ mm} \times (300 \text{ mm})^3}{48} + \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} \times (150 \text{ mm} - 151.21 \text{ mm})^2 - \frac{\pi}{4} \times (25 \text{ mm})^4 - \frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2 \times (150 \text{ mm} - 151.21 \text{ mm})^2$$

$$\bar{I}_y = 119.363 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Producto de inercias

$$\overline{I_{xy}} = -1 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (155 \text{ mm} - 151.21 \text{ mm}) \times (225 \text{ mm} - 406.7 \text{ mm}) \times 9000 \text{ mm}^2 + 0 \text{ mm}^4 + (150 \text{ mm} - 151.21 \text{ mm}) \times (466.67 \text{ mm} - 406.7 \text{ mm}) \times \frac{300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}}{2} + 0 \text{ mm}^4 + (150 \text{ mm} - 151.21 \text{ mm}) \times (490 \text{ mm} - 406.7 \text{ mm}) \times -\frac{\pi}{4} \times (50 \text{ mm})^2$$

$$\overline{I_{xy}} = -9.1767 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Las inercias principales (I_{max} , I_{min})

De la teoría del círculo de Mohr, usamos estas ecuaciones para poder hallar las inercias máximas y mínimas como se muestra a continuación:

$$I_{prom} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{471761428.9 \text{ mm}^4 + 119363529 \text{ mm}^4}{2} = 295.562 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{cp} = \left| \frac{I_x - I_y}{2} \right| = \left| \frac{471761428.9 \text{ mm}^4 - 119363529 \text{ mm}^4}{2} \right| = 176.198 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

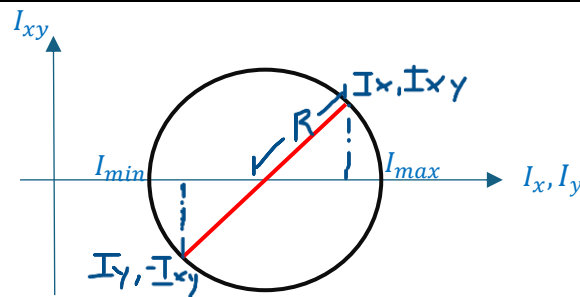
$$R = \sqrt{I_{cp}^2 + I_{xy}^2} = \sqrt{(176198950 \text{ mm}^4)^2 + (-9176791.4 \text{ mm}^4)^2} = 176.437 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{máx} = I_{prom} + R = 295562479 \text{ mm}^4 + 176437760.9 \text{ mm}^4 = 472.000 \times 10^6 \text{ mm}^4$$


$$I_{min} = I_{prom} - R = 295562479 \text{ mm}^4 - 176437760.9 \text{ mm}^4 = 119.124 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Figura 3

Círculo de Mohr



Nota. Fuente: Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

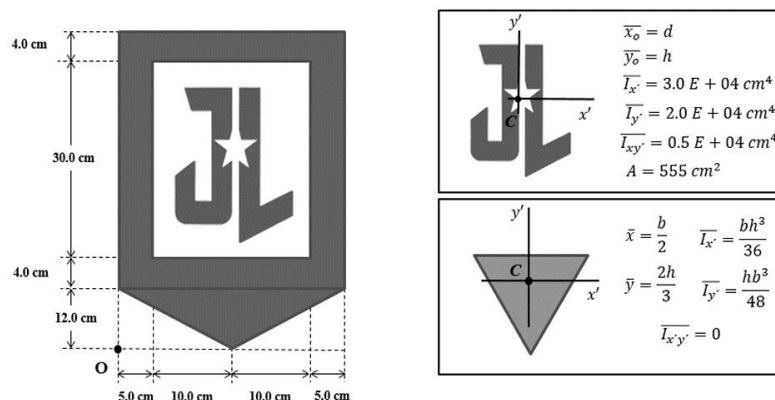
EJERCICIO 4

La siguiente sección transversal de un elemento estructural con el logo de la liga de la justicia se construye para promover el estreno de la película el día 17 de noviembre de 2017. Si considera que las coordenadas del centroide global de la sección con respecto al punto O son $\bar{x} = 13.69 \text{ cm}$ y $\bar{y} = 25.58 \text{ cm}$, determine:

- El centroide individual (d, h) del logo de la liga de la justicia con respecto a O.
- Las (\bar{I}_x, \bar{I}_y) , el radio de giro polar (\bar{K}_O) y el producto de inercia (\bar{I}_{xy}) .
- Las inercias principales (I_{max}, I_{min})

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

Solución 4


Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal de un elemento estructural la cual es una sección compuesta. Por ende, debemos hallar cada uno de los ítems desde el punto de referencia O.

4.1 Hallamos centroides (\bar{x}, \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 2**.

En este ejercicio debemos hallar el centroide de el logo de la liga de la justicia teniendo en cuenta que ya tenemos el valor del centroide de la sección compuesta en la que identificamos el logo, un triángulo, un rectángulo macizo y uno hueco. Es por esto que vamos a hallar el centroide de la figura compuesta como ya sabemos hacerlo teniendo en cuenta que ya tenemos el valor de este centroide donde despejaremos el centroide del logo como se muestra a continuación:

$$\bar{x} = 13.69 \text{ cm} \quad \bar{y} = 25.58 \text{ cm}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

13.69 cm

$$\bar{x} = \frac{555 \text{ cm}^2 \times d + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} \times \frac{30 \text{ cm}}{2} + (30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}) \times \left(\frac{30 \text{ cm}}{2}\right) - (20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}) \times \left(5 \text{ cm} + \frac{20 \text{ cm}}{2}\right)}{555 \text{ cm}^2 + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} + (30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}) - (20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm})}$$

25.58 cm

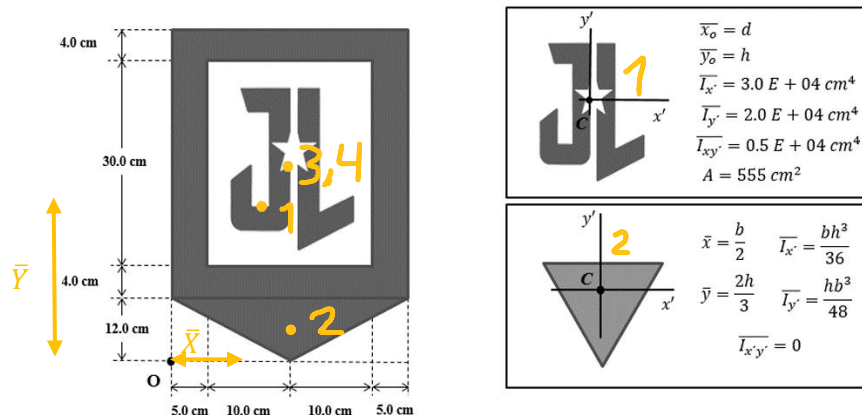
$$\bar{y} = \frac{555 \text{ cm}^2 \times h + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} \times \frac{2 \times 12 \text{ cm}}{3} + (30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}) \times \left(12 \text{ cm} + \frac{38 \text{ cm}}{2}\right) - (20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}) \times \left(16 \text{ cm} + \frac{30 \text{ cm}}{2}\right)}{555 \text{ cm}^2 + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} + (30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}) - (20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm})}$$

$$d = 11.99 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

$$h = 26 \text{ cm}$$

Figura 2

Centroides de la sección



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016


4.2 Hallamos Momentos de inercia (\bar{I}_x, \bar{I}_y)

Como debemos hallar los momentos de inercia de nuestra sección debemos tener en cuenta las fórmulas de las tablas mostradas en la **Figura 2**, los centroides hallados en el inciso anterior y el teorema de Steiner debido a que nuestra sección se compone de varias figuras de diferente geometría unidas.

Por último, cabe resaltar que el momento de inercias en “x” usa distancias en “y” y viceversa.

$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= 3 \times 10^4 \text{ cm}^4 + 555 \text{ cm}^2 \times (26 \text{ cm} - 25.58 \text{ cm})^2 + \frac{30 \text{ cm} \times (12 \text{ cm})^3}{36} + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} \times \left(\frac{2 \times 12 \text{ cm}}{3} - 25.58 \text{ cm}\right)^2 + \frac{30 \text{ cm} \times (38 \text{ cm})^3}{12} + \\ & 30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm} \times \left(12 \text{ cm} + \frac{38 \text{ cm}}{2} - 25.58 \text{ cm}\right)^2 - \frac{20 \text{ cm} \times (30 \text{ cm})^3}{12} - 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times \left(16 \text{ cm} + \frac{30 \text{ cm}}{2} - 25.58 \text{ cm}\right)^2 \\ \bar{I}_x &= 195.211 \times 10^3 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_y &= 2 \times 10^4 \text{ cm}^4 + 555 \text{ cm}^2 \times (12 \text{ cm} - 13.69 \text{ cm})^2 + \frac{12 \text{ cm} \times (30 \text{ cm})^3}{48} + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} \times \left(\frac{30 \text{ cm}}{2} - 13.69 \text{ cm}\right)^2 + \frac{38 \text{ cm} \times (30 \text{ cm})^3}{12} + \\ & 30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm} \times \left(\frac{30 \text{ cm}}{2} - 13.69 \text{ cm}\right)^2 - \frac{30 \text{ cm} \times (20 \text{ cm})^3}{12} - 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times \left(5 \text{ cm} + \frac{20 \text{ cm}}{2} - 13.69 \text{ cm}\right)^2 \\ \bar{I}_y &= 95.070 \times 10^3 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Producto de inercias ($\overline{I_{xy}}$)

$$\begin{aligned} \overline{I_{xy}} &= 0.5 \times 10^4 \text{ cm}^4 + (12 \text{ cm} - 13.69 \text{ cm}) \times (26 \text{ cm} - 25.58 \text{ cm}) \times 555 \text{ cm}^2 + 0 \text{ cm}^4 + \left(\frac{30 \text{ cm}}{2} - 13.69 \text{ cm} \right) \times \left(\frac{2 \times 12 \text{ cm}}{3} - 25.58 \text{ cm} \right) \times \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} + 0 \text{ cm}^4 + \left(\left(\frac{30 \text{ cm}}{2} \right) - 13.69 \text{ cm} \right) \times \left(\left(12 \text{ cm} + \frac{38 \text{ cm}}{2} \right) - 25.58 \text{ cm} \right) \times 30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm} + 0 \text{ cm}^4 - \left(\left(5 \text{ cm} + \frac{20 \text{ cm}}{2} \right) - 13.69 \text{ cm} \right) \times \left(\left(16 \text{ cm} + \frac{30 \text{ cm}}{2} \right) - 25.58 \text{ cm} \right) \times 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \\ \overline{I_{xy}} &= 4.294 \times 10^3 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Radio de giro (R_x, R_y)

$$\begin{aligned} R_x &= \sqrt{\frac{\overline{I_x}}{A}} = \sqrt{\frac{195211.31 \text{ cm}^4}{555 \text{ cm}^2 + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} + (30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}) - (20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm})}} = 12.37 \text{ cm} \\ R_y &= \sqrt{\frac{\overline{I_y}}{A}} = \sqrt{\frac{95070.73 \text{ cm}^4}{555 \text{ cm}^2 + \frac{30 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} + (30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}) - (20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm})}} = 8.63 \text{ cm} \end{aligned}$$

Las inercias principales (I_{max}, I_{min})

De la teoría del círculo de Mohr, usamos estas ecuaciones para poder hallar las inercias máximas y mínimas como se muestra a continuación:

$$I_{prom} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{195211.31 \text{ cm}^4 + 95070.73 \text{ cm}^4}{2} = 145.141 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_{cp} = \left| \frac{I_x - I_y}{2} \right| = \left| \frac{195211.31 \text{ cm}^4 - 95070.73 \text{ cm}^4}{2} \right| = 50.070 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

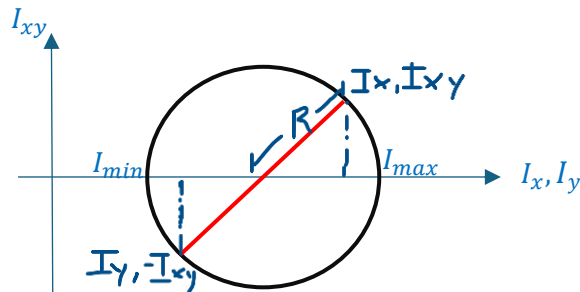
$$R = \sqrt{I_{cp}^2 + \overline{I_{xy}}^2} = \sqrt{(50070.29 \text{ cm}^4)^2 + (4294.805 \text{ cm}^4)^2} = 50.254 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_{máx} = I_{prom} + R = 145141.02 \text{ cm}^4 + 50254.15 \text{ cm}^4 = 195.395 \times 10^3 \text{ cm}^4$$


$$I_{mín} = I_{prom} - R = 145141.02 \text{ cm}^4 - 50254.15 \text{ cm}^4 = 94.886 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

Figura 3

Círculo de Mohr



Nota. Fuente: Autoría propia.

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

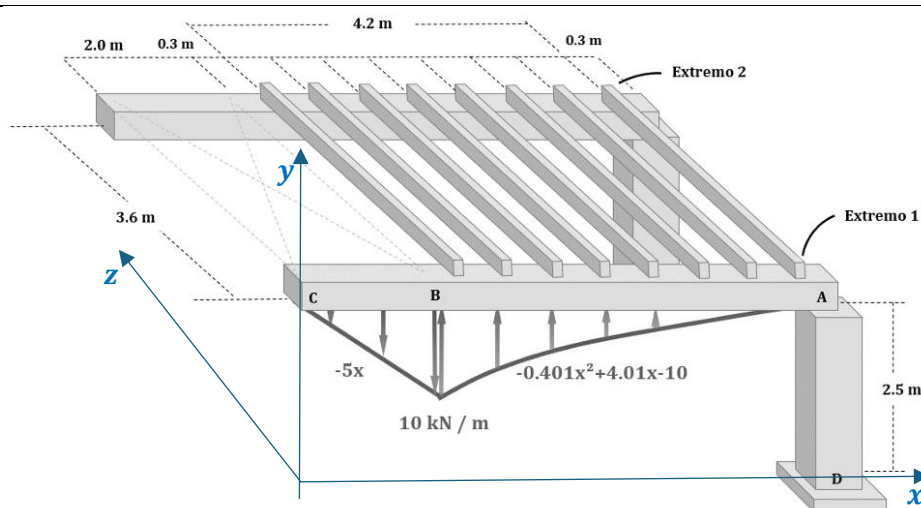
EJERCICIO 5

Una estructura tipo palco estadio tiene un vacío en la sección BC (X punteada) y recibe una carga doble arbitraria de viento en AB y BC. Si conoce que el palco obviamente tiene cubierta encima (no mostrada) que soporta una carga super impuesta de $0.5 \frac{KN}{m^2}$, determine:

- DFC y DMF de las viguetas de concreto (peso apreciable con S.T. de 0.1x0.3m).
- DFC y DMF de la Viga ABC (peso propio de elemento 0.4x0.40m).
- Las reacciones en la base de la columna AD (ignore su peso propio).

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016


Solución 5

Interpretando el ejercicio vemos que la viga ABC está siendo sometida por dos fuerzas externas distribuidas en el eje y tanto en el tramo AB como en el BC. Además de la transferencia de cargas de las viguetas que soportan el peso propio y la transferencia de la cubierta a viguetas. Teniendo en cuenta esto, se debe primero realizar la transferencia de cargas de la losa a las viguetas por métodos aferentes asumiendo que las viguetas están simplemente apoyadas y luego estas reacciones de las viguetas las soportará la viga ABC la cual está empotrada en A con la columna.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY después de haber transferido las cargas de la vigueta a la viga debido a que está contenida la viga ABC y las cargas en el plano XY.

5.1. Identificación de apoyos

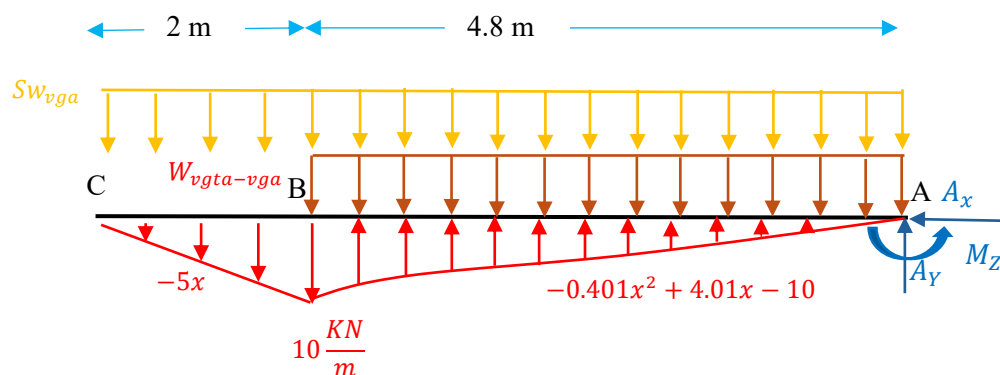
En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo A se identifican un apoyo de tercer orden donde se garantiza una restricción total a desplazamientos y giros. Generando una viga que está completamente restringida. Por último, hay que tener en cuenta que las viguetas están simplemente apoyadas a la viga.

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

5.2. Realizando un DCL

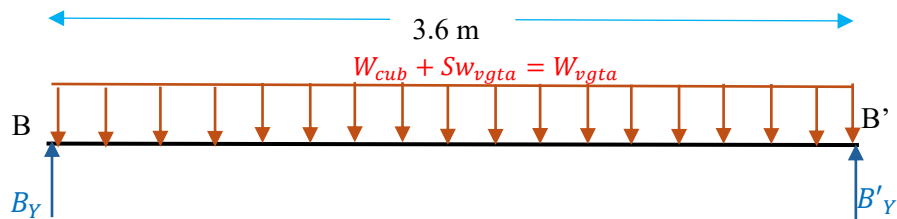
Realizando un DCL de la viga ABC en el plano XY como se muestra en la **Figura 2**. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra viga en estudio. Además, en la **Figura 3** se muestra un DCL de la vigueta y en la **Figura 4** se muestra el DCL de la columna.

Figura 2
DCL Viga ABC



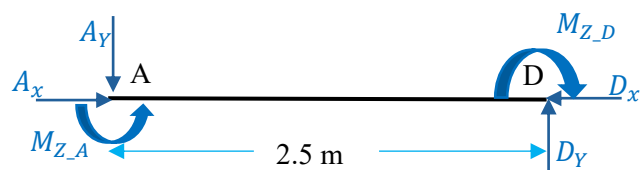
Nota. Autoría propia.


Figura 3
DCL Viguetas



Nota. Autoría propia.

Figura 4
DCL Columna AD



 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

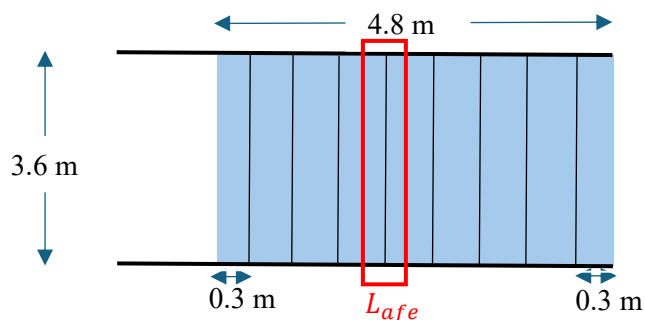
Nota. Autoría propia.

5.3. Transferencia de cargas de losa a viguetas por método aferente:

A continuación, se presenta en la **Figura 5** una vista en planta donde se puede evidenciar las aferencias usadas para cada una de las viguetas que conforman la cubierta.

Figura 5

Vista en planta



Nota. Autoría propia.

Cómo se observa en la figura anterior al tratarse de una losa de una dirección y al aplicar el método de aferencias donde cada vigueta toma la mitad de la distancia de losa tanto a su derecha como izquierda. Podemos observar que al tratarse de 8 viguetas y una losa de 4.8 m de longitud. La aferencia de cada vigueta va a ser igual por lo que cada vigueta va a soportar la misma carga catalogando estas viguetas como “Tipo 1” con un valor de aferencia de 0.6 m.

Con la carga super impuesta en el área de la losa, la aferencia anteriormente determinada y el valor del peso propio del concreto, se procede a transferir la carga de la losa a la vigueta.

$$W_{cub} = 0.5 \frac{KN}{m^2} \times 0.6 m = 0.3 \frac{KN}{m}$$

$$Sw_{vgta} = 24 \frac{KN}{m^3} \times 0.1 \frac{KN}{m} \times 0.3 \frac{KN}{m} = 0.72 \frac{KN}{m}$$


Finalmente, la carga que soportará la vigueta es la siguiente:

$$W_{vgta} = W_{cub} + Sw_{vgta} = 1.02 \frac{KN}{m}$$

5.4. Equilibrio externo Viguetas:

Cómo se trata de una vigueta simplemente apoyada en cada uno de sus extremos que soporta una carga distribuida uniforme por toda su longitud. Transfiere una carga puntual (reacción) a la viga que se satisface de la siguiente ecuación $\frac{W \times L}{2}$.

$$B_y = B'_y = \frac{1.02 \frac{KN}{m} \times 3.6 m}{2} = 1.84 KN$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

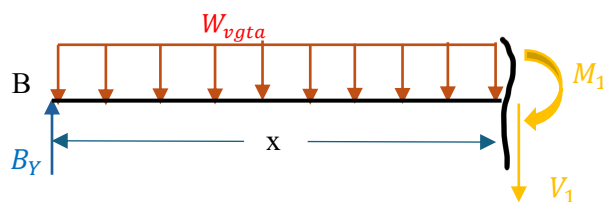
Nota: Tener en cuenta que por lo explicado en 5.3 cada vigueta soporta la misma carga.

5.5. Fuerzas internas de Viguetas

En este caso hallaremos la fuerza cortante y momento flector con el método de cortes.

Figura 6

Corte para las Viguetas



Nota. Autoría propia.

TRAMO 1 $0 \leq x \leq 3.6 \text{ m}$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -B_y \times x + M_1 + W_{vgta} \times x \times \frac{x}{2} = 0$$

$$M_1 = -W_{vgta} \times \frac{x^2}{2} + B_y \times x$$

$$M_1 = -1.02 \times \frac{x^2}{2} + 1.84 \times x$$

$$M_1(0) = 0 \quad M_1(3.6) = 0 \quad M_1(1.8) = 1.66 \text{ KN} - m$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y - V_1 - W_{vgta} \times x = 0$$

$$V_1 = -W_{vgta} \times x + B_y$$

$$V_1 = -1.02 \times x + 1.84$$

$$V_1(0) = 1.84 \text{ KN} \quad V_1(3.6) = -1.84 \text{ KN} \quad V_1(x) = 0 \rightarrow x = 1.8 \text{ m}$$


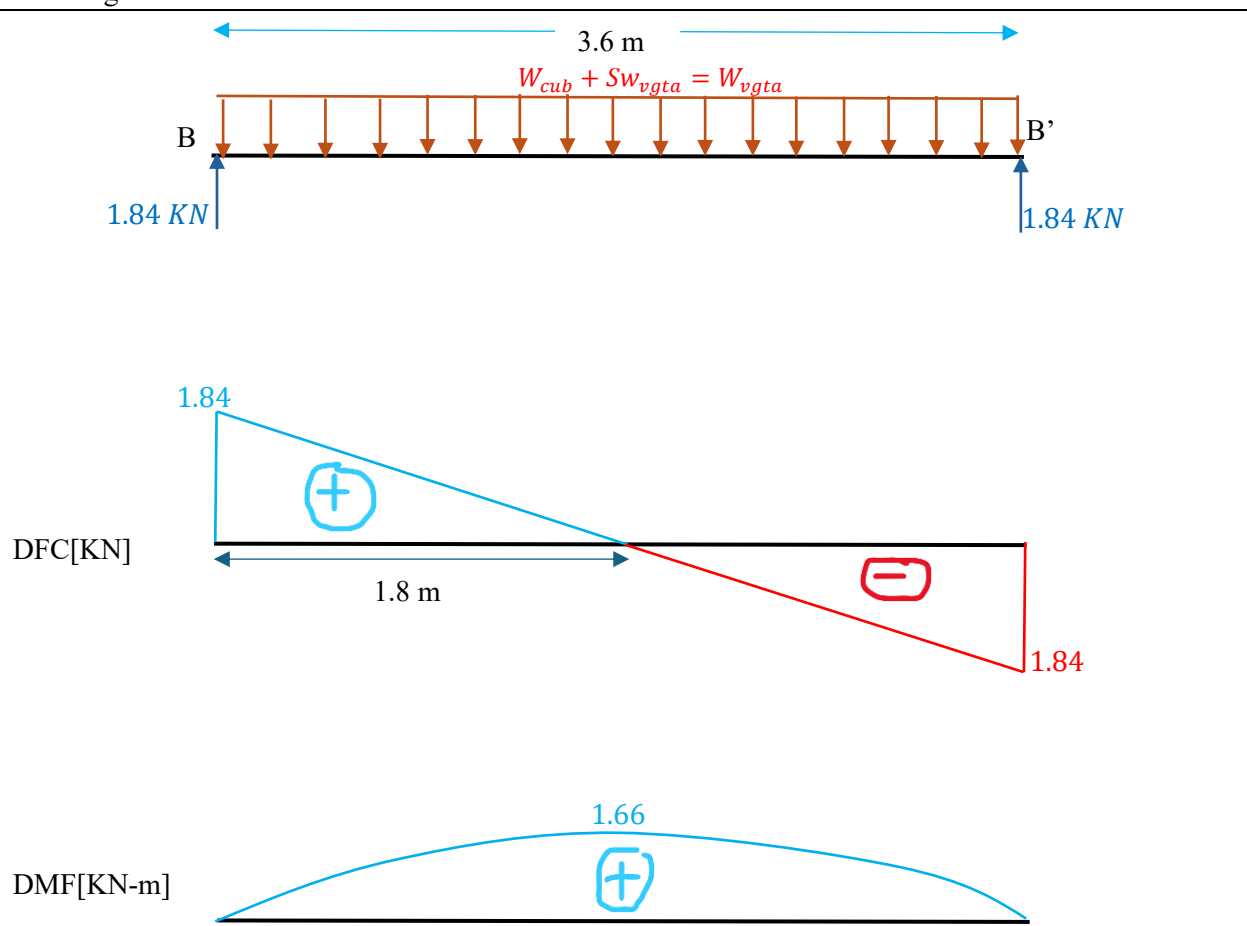
 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 7
DCL Viguetas



Nota. Autoría propia.


5.6. Transferencia de cargas de vigueta a viga ABC y Peso propio

Cómo se puede observar en la **Figura 2** representamos las reacciones puntuales de cada vigueta como una carga uniforme distribuida en la viga ABC. Esto se realiza ya que la aferencia entre viguetas es menor a 1m podremos tomar esta transferencia de cargas como una uniforme distribuida de la siguiente manera:

$$W_{vgta-vga} = \frac{1.84 \text{ kN}}{0.6 \text{ m}} = 3.07 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Hallando el peso propio de la viga ABC:

$$Sw_{vga} = 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 0.4 \text{ m} \times 0.4 \text{ m} = 3.84 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

5.7. Hallando carga puntual y su ubicación

Para puntualizar las cargas distribuidas sabemos que se hace por medio de sus áreas y teniendo en cuenta que las cargas se ubicarán en su centroide. Obtenemos lo siguiente:

Puntual de $W_1(x)$

$$P_{w1} = \int_0^2 -5x \, dx = 10 \, KN \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_1(x)$

$$X_1 = \frac{\int_0^2 (-5x)x \, dx}{\int_0^2 -5x \, dx} = 1.33 \, m (\text{dist de izq a der})$$

Puntual de $W_2(x)$

$$P_{w2} = \int_0^{4.8} -0.401x^2 + 4.01x - 10 \, dx = 16.59 \, KN \quad \uparrow$$

Ubicación de $W_2(x)$

$$X_2 = \frac{\int_0^{4.8} (-0.401x^2 + 4.01x - 10)x \, dx}{\int_0^{4.8} -0.401x^2 + 4.01x - 10 \, dx} = 1.24 \, m (\text{dist de izq a der})$$

Puntual de Sw_{vga}

$$P_{Sw_{vga}} = \int_0^{6.8} 3.84 \, dx \, \text{ó} \, 3.84 \frac{KN}{m} \times 6.8 \, m = 26.112 \, KN \quad \downarrow$$

Ubicación de Sw_{vga}

$$X_{vga} = \frac{\int_0^{6.8} (3.84)x \, dx}{\int_0^{6.8} 3.84 \, dx} \, \text{ó} \, \frac{6.8 \, m}{2} = 3.4 \, m$$


Puntual de $W_{vgta-vga}$

$$P_{Sw_{vgta-vga}} = \int_0^{4.8} 3.07 \, dx \, \text{ó} \, 3.07 \frac{KN}{m} \times 4.8 \, m = 14.74 \, KN \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_{vgta-vga}$

$$X_{vgta-vga} = \frac{\int_0^{4.8} (3.07)x \, dx}{\int_0^{4.8} 3.07 \, dx} \, \text{ó} \, \frac{4.8 \, m}{2} = 2.4 \, m$$

Usamos las integrales para hallar los centroides y fuerzas debido a que no hay tablas o no hay manera de sacar el área de estas figuras de otra manera al ser polinomios diferentes a un grado.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

5.8. Realizando equilibrio para hallar reacciones Viga

Cómo ya se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a realizar equilibrio estático en 2D para la viga de estudio. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el A ya que tiene tres incógnitas o reacciones en dicho punto. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios.

$$\sum M_{z_A} = 0 \rightarrow 10 \text{ KN} \times 5.47 \text{ m} - 16.59 \text{ KN} \times 3.56 \text{ m} + 26.112 \text{ KN} \times 3.4 \text{ m} + 14.74 \text{ KN} \times 2.4 \text{ m} + M_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 10 \text{ KN} + 16.59 \text{ KN} - 26.112 \text{ KN} - 14.74 \text{ KN} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3x3 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned} M_A &= -119.796 \text{ KN} - m \\ A_y &= 34.262 \text{ KN} \uparrow \\ A_x &= 0 \text{ KN} \end{aligned}$$

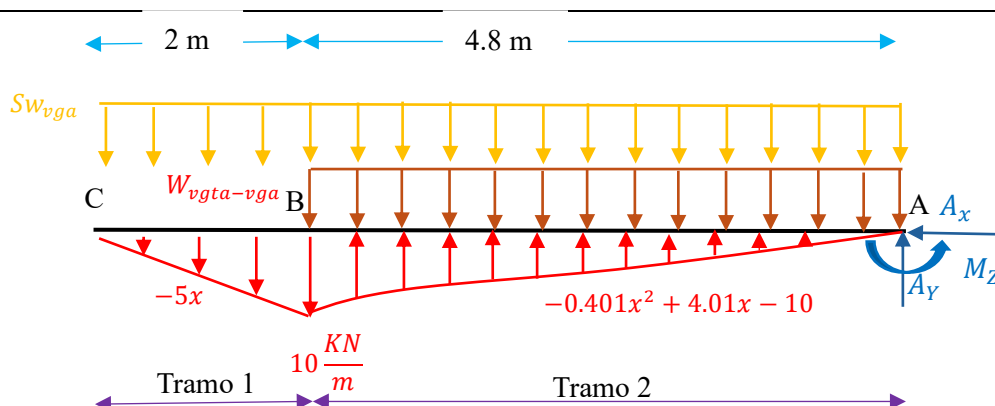
5.9. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos integrales, teniendo en cuenta que este método lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).


Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto por lo que en la **Figura 8** se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.

Figura 8

DCL Viga ABC con tramos



Nota. Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

5.8. Hallamos fuerzas internas

TRAMO CB $0 \leq x \leq 2m$

$$V_{CB}(x) = - \int (3.84 + 5x) dx + 0$$

$$V_{CB}(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 3.84x$$

$$V_{CB}(0) = 0 \text{ KN} \quad V_{CB}(2) = -17.68 \text{ KN}$$

$$M_{CB}(x) = \int -\frac{5}{2}x^2 - 3.84x dx$$

$$M_{CB}(x) = -\frac{5}{6}x^3 - \frac{3.84}{2}x^2$$

$$M_{CB}(0) = 0 \quad M_{CB}(2) = -14.347 \text{ KN} - m$$

TRAMO BA $0 \leq x \leq 4.8m$

$$V_{BA}(x) = - \int (3.07) + (3.84) - (0.401x^2 - 4.01x + 10) dx + (-17.68)$$

$$V_{BA}(x) = \frac{0.401x^3}{3} - \frac{4.01x^2}{2} + 3.09x - 17.68$$

$$V_{BA}(0) = -17.68 \text{ KN} \quad V_{BA}(4.8) = -34.26 \text{ KN}$$

Hallando Cortante cuando vale cero $V_{BA}(x) = 0 \rightarrow x = m$


$$M_{BA}(x) = \int \frac{0.401x^3}{3} - \frac{4.01x^2}{2} + 3.09x - 17.68 dx + (-14.347)$$

$$M_{BA}(x) = \frac{0.401x^4}{12} - \frac{4.01x^3}{6} + \frac{3.09}{2}x^2 - 17.68x - 14.347$$

$$M_{BA}(0) = -14.347 \text{ KN} - m \quad M_{BA}(4.8) = -119.79 \text{ KN} - m$$

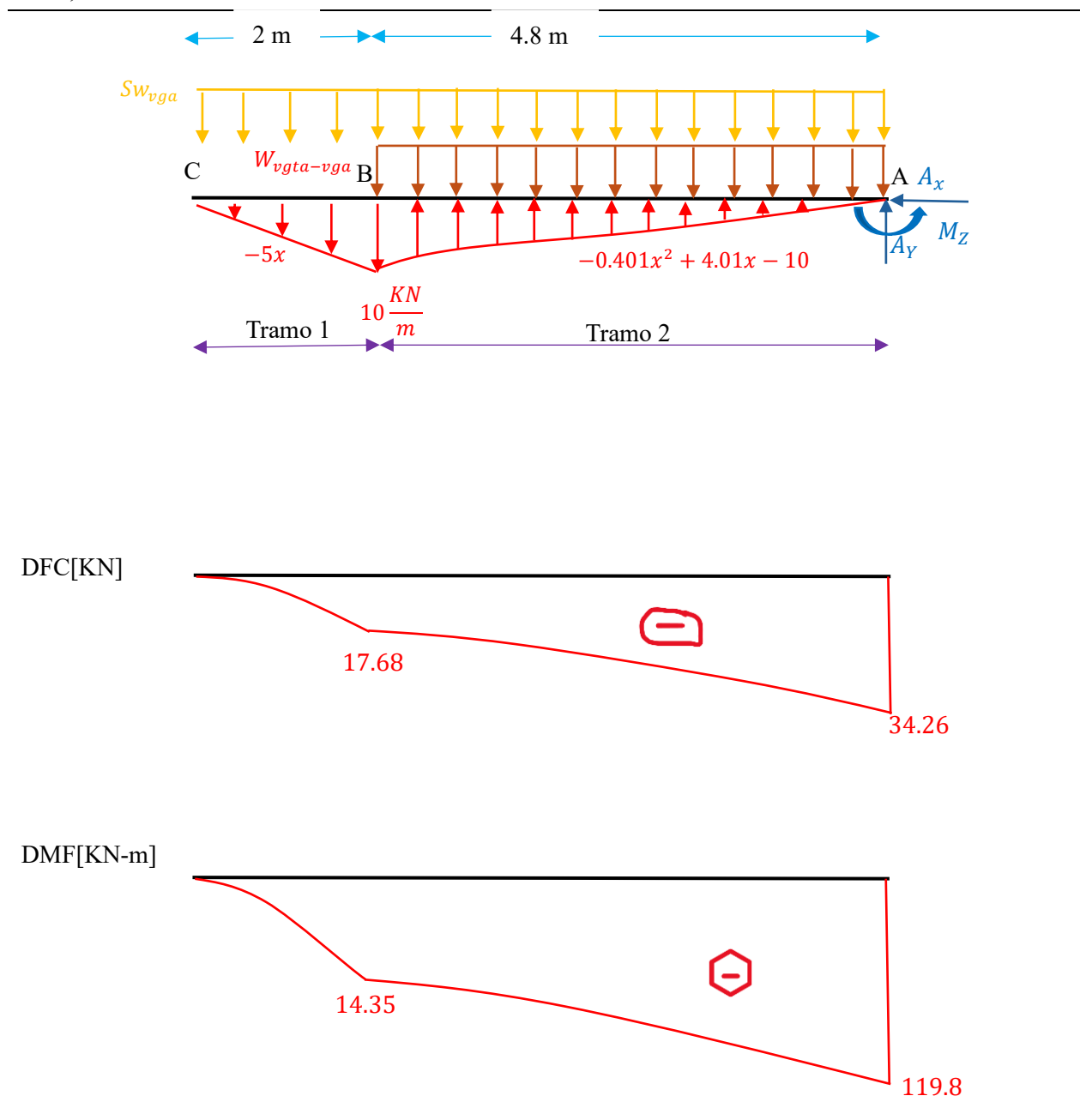
Hallando el momento máximo de este tramo $M_{BC}(0.72) = -25.92 \text{ N} - m$

Hallando momento cuando vale cero $M_{BC}(x) = 0 \rightarrow x = 1.44 \text{ m}$


 ESCUOLA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

5.9. Hacemos DFC y DMF

Figura 9
DFC, DMF



Nota. Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

5.10. Realizando equilibrio para hallar reacciones Columna

Cómo ya se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación que transfiere la viga a la columna, procedemos a realizar equilibrio estático en 2D para la columna.

$$\begin{aligned}\sum M_{z,D} &= 0 \rightarrow M_A = M_D \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow A_y = D_y \\ \sum F_x &= 0 \rightarrow D_x = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3x3 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned}M_D &= -119.796 \text{ KN} - m \\ D_y &= 34.262 \text{ KN} \\ D_x &= 0 \text{ KN}\end{aligned}$$

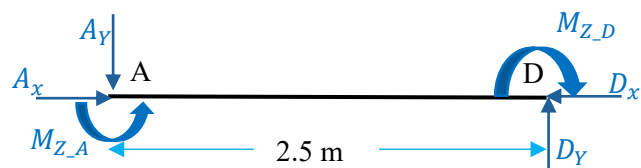
5.11. Hallamos fuerzas internas

TRAMO AD $0 \leq x \leq 2.5m$

$$\begin{aligned}V_{CB}(x) &= 34.262 \\ V_{CB}(0) &= 34.262 \text{ KN} \quad V_{CB}(2) = 34.262 \text{ KN} \\ M_{CB}(x) &= -119.796 \\ M_{CB}(0) &= -119.796 \text{ KN} - m \quad M_{CB}(2) = -119.796 \text{ KN} - m\end{aligned}$$

Figura 4


DCL Columna AD



DFC[KN]

DMF[KN-m]

Nota. Autoría propia.

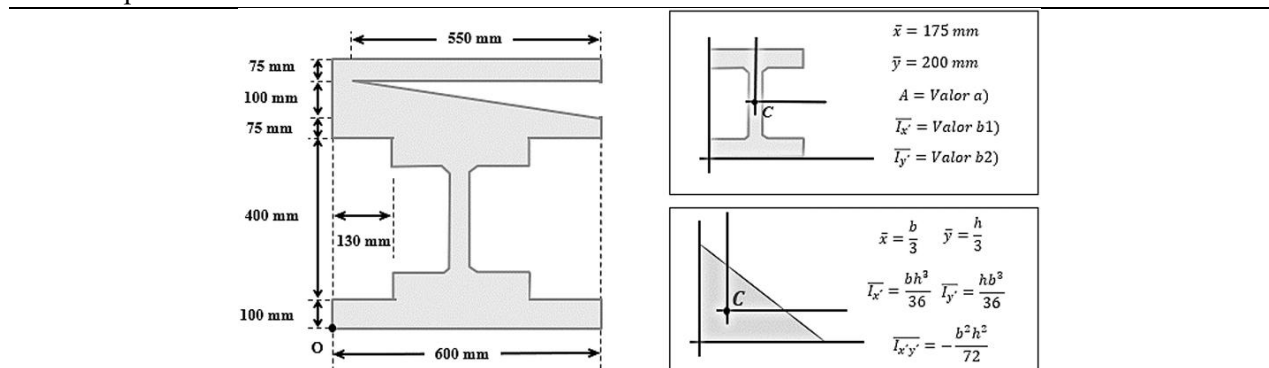
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

EJERCICIO 6

La siguiente sección transversal de un elemento estructural es usada para la construcción de una viga en “I” de un puente, sin embargo, requería una modificación en forma de triángulo rectángulo para el paso de ductos eléctricos y de datos, como se muestra en la imagen inferior.

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

Si considera que las coordenadas del centroide global de la sección con respecto al punto O son $x = 293.94 \text{ mm}$, $\bar{y} = ?$, y que los momentos de inercias globales son $I_{x'} = 17.24 \times 10^9 \text{ mm}^4$ e $I_{y'} = 78.55 \times 10^8 \text{ mm}^4$, determine:

- El área individual de la sección transversal en “I”.
- Las inercias centroidales individuales de la figura “I” (I_x , I_y).
- Determinar los radios de giro K_y y K_x .
- Las inercias principales por cualquier método de cálculo (I_{max} , I_{min}).

Solución 6


Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal de un elemento estructural la cual es una sección compuesta. Por ende, debemos hallar cada uno de los ítems desde el punto de referencia O.

6.1 Hallamos centroides (\bar{x} , \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 2**.

En este ejercicio debemos hallar el área de la “I” y teniendo en cuenta que ya tenemos el valor del centroide de la sección compuesta. Es por esto que vamos a hallar el centroide de la figura compuesta como ya sabemos hacerlo teniendo en cuenta que ya tenemos el valor de este centroide donde despejaremos el área de la sección en “I” como se muestra a continuación:

$$\bar{x} = 293.94 \text{ mm}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$\bar{x} = \frac{A \times 305 \text{ mm} + 600 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times \frac{600 \text{ mm}}{2} + (600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}) \times \left(\frac{600 \text{ mm}}{2} \right) - \frac{550 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2} \times \left(50 \text{ mm} + \frac{2 \times 550 \text{ mm}}{3} \right)}{A + 600 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} + (600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}) - \frac{550 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2}}$$

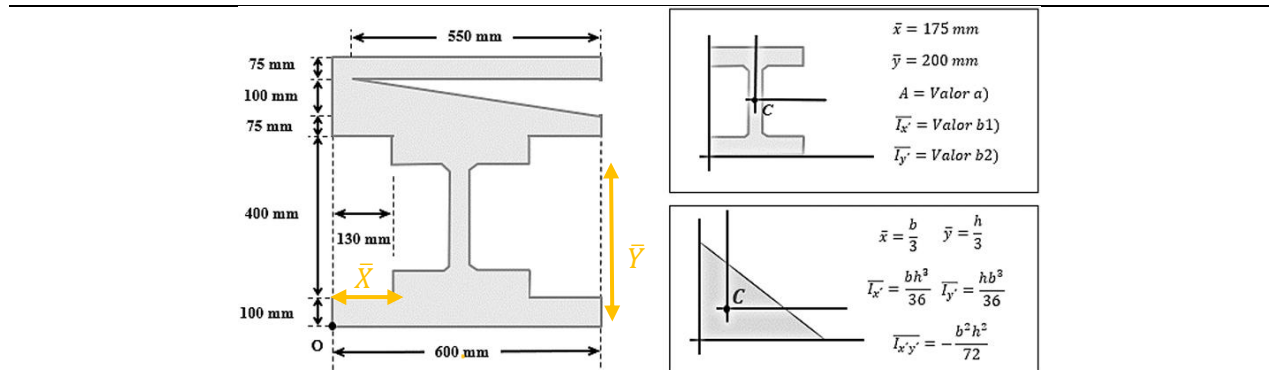
$$A = 190088.9 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{A \times 300 \text{ mm} + 600 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times \frac{100 \text{ mm}}{2} + (600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}) \times \left(500 \text{ mm} + \frac{250 \text{ mm}}{2} \right) - \frac{550 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2} \times \left(575 \text{ mm} + \frac{2 \times 100 \text{ mm}}{3} \right)}{A + 600 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} + (600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}) - \frac{550 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2}}$$

$$\bar{y} = 365.36 \text{ mm}$$

Figura 2

Centroides de la sección



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

6.2 Hallamos Momentos de inercia (\bar{I}_x, \bar{I}_y)


Como debemos hallar los momentos de inercia de nuestra sección "I" debemos tener en cuenta las fórmulas de las tablas mostradas en la **Figura 2**, los centroides hallados en el inciso anterior y el teorema de Steiner debido a que nuestra sección se compone de varias figuras de diferente geometría unidas. Donde ya sabemos la inercia global de la figura y despejamos la inercia individual de la sección en "I" en ambos ejes. Por último, cabe resaltar que el momento de inercias en "x" usa distancias en "y" y viceversa.

$$\bar{I}_x = I_x + 190088.9 \text{ mm}^2 \times (300 \text{ mm} - 365.36 \text{ mm})^2 + \frac{600 \text{ mm} \times (100 \text{ mm})^3}{12} + 600 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times (50 \text{ mm} - 365.36 \text{ mm})^2 + \frac{600 \text{ mm} \times (250 \text{ mm})^3}{12} + 600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm} \times \left(\left(500 \text{ mm} + \frac{250 \text{ mm}}{2} \right) - 365.36 \text{ mm} \right)^2 - \frac{550 \text{ mm} \times (100 \text{ mm})^3}{36} - \frac{550 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2} \times \left(\left(575 \text{ mm} + \frac{2 \times 100 \text{ mm}}{3} \right) - 365.36 \text{ mm} \right)^2$$

$$I_x = 1632.672 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = I_y + 190088.9 \text{ mm}^2 \times (305 \text{ mm} - 293.94 \text{ mm})^2 + \frac{100 \text{ mm} \times (600 \text{ mm})^3}{12} + 600 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times (300 \text{ mm} - 293.94 \text{ mm})^2 + \frac{250 \text{ mm} \times (600 \text{ mm})^3}{12} + 600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm} \times (300 \text{ mm} - 293.94 \text{ mm})^2 - \frac{100 \text{ mm} \times (550 \text{ mm})^3}{36} - \frac{550 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2} \times \left(\left(50 \text{ mm} + \frac{2 \times 550 \text{ mm}}{3} \right) - 293.94 \text{ mm} \right)^2$$

$$I_y = 2400 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Producto de inercias (\overline{I}_{xy})

$$\begin{aligned} \overline{I}_{xy} = & 0 \text{ mm}^4 + (300\text{mm} - 365.36\text{mm}) \times (305\text{mm} - 293.94 \text{ mm}) \times 190088.9 \text{ mm}^2 + 0 \text{ mm}^4 + (50\text{mm} - 365.36\text{mm}) \times \\ & (300\text{mm} - 293.94\text{mm}) \times 600\text{mm} \times 100\text{mm} + 0 \text{ mm}^4 + \left((500\text{mm} + \frac{250\text{mm}}{2}) - 365.36\text{mm} \right) \times (300\text{mm} - 293.94\text{mm}) \times \\ & 600\text{mm} \times 250\text{mm} - \frac{(550\text{mm})^2 \times (100\text{mm})^2}{72} + \left(\left(575\text{mm} + \frac{2 \times 100\text{mm}}{3} \right) - 365.36\text{mm} \right) \times \left(\left(50\text{mm} + \frac{2 \times 550\text{mm}}{3} \right) - 293.94\text{mm} \right) \times \\ & - \frac{550\text{mm} \times 100\text{mm}}{2} \\ \overline{I}_{xy} = & -990.608 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Radio de giro (R_x, R_y)

$$\begin{aligned} R_x = \sqrt{\frac{\overline{I}_x}{A}} &= \sqrt{\frac{17.24 \times 10^9 \text{ mm}^4}{190088.9 \text{ mm}^2 + 600\text{mm} \times 100\text{mm} + (600\text{mm} \times 250\text{mm}) - \frac{550\text{mm} \times 100\text{mm}}{2}}} = 215.1 \text{ mm} \\ R_y = \sqrt{\frac{\overline{I}_y}{A}} &= \sqrt{\frac{78.55 \times 10^8 \text{ mm}^4}{190088.9 \text{ mm}^2 + 600\text{mm} \times 100\text{mm} + (600\text{mm} \times 250\text{mm}) - \frac{550\text{mm} \times 100\text{mm}}{2}}} = 145.2 \text{ mm} \end{aligned}$$

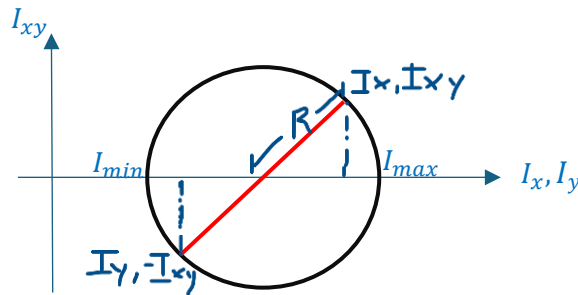
Las inercias principales (I_{max}, I_{min})

De la teoría del círculo de Mohr, usamos estas ecuaciones para poder hallar las inercias máximas y mínimas como se muestra a continuación:


$$\begin{aligned} I_{prom} &= \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{17.24 \times 10^9 \text{ mm}^4 + 78.55 \times 10^8 \text{ mm}^4}{2} = 1.25475 \times 10^{10} \text{ mm}^4 \\ I_{cp} &= \left| \frac{I_x - I_y}{2} \right| = \left| \frac{17.24 \times 10^9 \text{ mm}^4 - 78.55 \times 10^8 \text{ mm}^4}{2} \right| = 4.6925 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ R &= \sqrt{I_{cp}^2 + \overline{I}_{xy}^2} = \sqrt{(4.6925 \times 10^9 \text{ mm}^4)^2 + (-990608188 \text{ mm}^4)^2} = 4.795921270 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ I_{máx} &= I_{prom} + R = 1.25475 \times 10^{10} \text{ mm}^4 + 4795921270 \text{ mm}^4 = 1.734342 \times 10^{10} \text{ mm}^4 \\ I_{min} &= I_{prom} - R = 1.25475 \times 10^{10} \text{ mm}^4 - 4795921270 \text{ mm}^4 = 7.751579 \times 10^9 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Figura 3

Círculo de Mohr



Nota. Fuente: Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

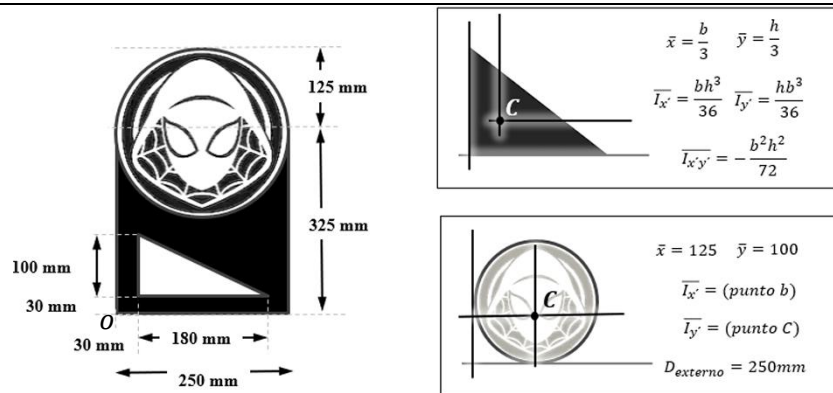
EJERCICIO 7

Con el fin de realizar una promoción de la película animada de Spiderman, se construye una viga con sección transversal mostrada en la **Figura 1** compuesta por un área circular con orificios irregulares que tiene un área total de 39000 mm^2 y una base metálica rectangular con un orificio triangular. La sección recibe cargas puntuales a cortante que pueden ocasionar falla por rotación y requiere ser evaluada en sus propiedades geométricas, pero el constructor no tiene idea de las inercias individuales del área en forma de Spiderman, solo conoce que las inercias totales deben ser del orden de $1.01 \times 10^9 \text{ mm}^4 (I_x)$ y $4.09 \times 10^8 \text{ mm}^4 (I_y)$. Teniendo en cuenta lo anterior, determine:

- El centroide total de la sección transversal.
- Los momentos de Inercia individuales de la sección Spiderman en x.
- Los momentos de Inercia individuales de la sección Spiderman en y.
- Los momentos principales de inercia para la sección total.

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016


Solución 7

Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal de un elemento estructural la cual es una sección compuesta. Por ende, debemos hallar cada uno de los ítems desde el punto de referencia O.

7.1 Hallamos centroides (\bar{x}, \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 2**.

Es por esto por lo que vamos a hallar el centroide de la figura compuesta como ya sabemos hacerlo teniendo en cuenta que tenemos cuatro figuras que componen nuestra sección transversal como se muestra a continuación:

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$\bar{x} = \frac{250\text{mm} \times 325\text{mm} \times \frac{250\text{mm}}{2} - \frac{180\text{mm} \times 100\text{mm}}{2} \times \left(30\text{mm} + \frac{180\text{mm}}{3}\right) - \frac{\pi}{8} \times (250\text{mm})^2 \times (125\text{mm}) + \frac{\pi \times (250\text{mm})^2}{4} \times (125\text{mm})}{250\text{mm} \times 325\text{mm} - \frac{180\text{mm} \times 100\text{mm}}{2} - \frac{\pi}{8} \times (250\text{mm})^2 + \frac{\pi \times (250\text{mm})^2}{4}}$$

$$\bar{x} = 128.25 \text{ mm}$$

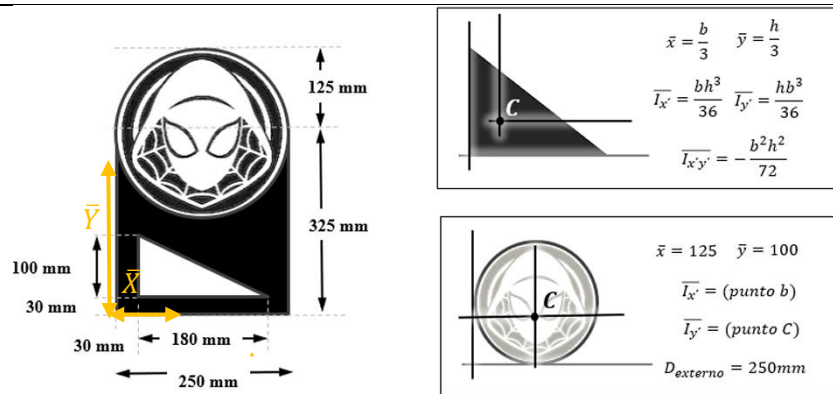
$$\bar{y} = \frac{250\text{mm} \times 325\text{mm} \times \frac{325\text{mm}}{2} - \frac{180\text{mm} \times 100\text{mm}}{2} \times \left(30\text{mm} + \frac{100\text{mm}}{3}\right) - \frac{\pi}{8} \times (250\text{mm})^2 \times \left(325\text{mm} - \frac{4 \times 125\text{mm}}{3\pi}\right) + \frac{\pi \times (250\text{mm})^2}{4} \times (300\text{mm})}{250\text{mm} \times 325\text{mm} - \frac{180\text{mm} \times 100\text{mm}}{2} - \frac{\pi}{8} \times (250\text{mm})^2 + \frac{\pi \times (250\text{mm})^2}{4}}$$

$$\bar{y} = 213.7 \text{ mm}$$

Nota: El valor del centroide del logo de Spiderman sale de a la altura del rectángulo restarle el radio del logo y sumarle el centroide del logo que se evidencia en las tablas de la Figura 1.

Figura 2

Centroides de la sección



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016


7.2 Hallamos Momentos de inercia (\bar{I}_x, \bar{I}_y)

Como debemos hallar los momentos de inercia de nuestro logo de Spiderman debemos tener en cuenta las fórmulas de las tablas mostradas en la **Figura 2**, los centroides hallados en el inciso anterior y el teorema de Steiner debido a que nuestra sección se compone de varias figuras de diferente geometría unidas. Donde ya sabemos la inercia global de la figura y despejamos la inercia individual del logo de Spiderman en ambos ejes.

Por último, cabe resaltar que el momento de inercias en “x” usa distancias en “y” y viceversa.

$$\bar{I}_x = I_x + \frac{\pi \times (250\text{mm})^2}{4} \times (300\text{mm} - 213.7\text{mm})^2 + \frac{250\text{mm} \times (325\text{mm})^3}{12} + 250\text{mm} \times 325\text{mm} \times \left(\frac{325\text{mm}}{2} - 213.7\text{mm}\right)^2 - \frac{180\text{mm} \times (100\text{mm})^3}{36} - \frac{180\text{mm} \times 100\text{mm}}{2} \times \left(\left(30\text{mm} + \frac{100\text{mm}}{3}\right) - 213.7\text{mm}\right)^2 - 0.1098 \times (125\text{mm})^4 - \frac{\pi}{8} \times (250\text{mm})^2 \times \left(325\text{mm} - \frac{4 \times 125\text{mm}}{3\pi}\right) - 213.7\text{mm})^2$$

$$I_x = 34.822523 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$4.09 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_y + \frac{\pi \times (250 \text{ mm})^2}{4} \times (125 \text{ mm} - 128.25 \text{ mm})^2 + \frac{325 \text{ mm} \times (250 \text{ mm})^3}{12} + 250 \text{ mm} \times 325 \text{ mm} \times \left(\frac{250 \text{ mm}}{2} - 128.25 \text{ mm} \right)^2 - \frac{100 \text{ mm} \times (180 \text{ mm})^3}{36} - \frac{180 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2} \times \left(\left(30 \text{ mm} + \frac{180 \text{ mm}}{3} \right) - 128.25 \text{ mm} \right)^2 - \frac{\pi \times (125 \text{ mm})^4}{8} - \frac{\pi}{8} \times (250 \text{ mm})^2 \times (125 \text{ mm} - 128.25 \text{ mm})^2$$

$$I_y = 109.946 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Producto de inercias (\overline{I}_{xy})

$$\overline{I}_{xy} = 0 \text{ mm}^4 + (300 \text{ mm} - 213.7 \text{ mm}) \times (125 \text{ mm} - 128.25 \text{ mm}) \times \frac{\pi \times (250 \text{ mm})^2}{4} + 0 \text{ mm}^4 + \left(\frac{325 \text{ mm}}{2} - 213.7 \text{ mm} \right) \times \left(\frac{250 \text{ mm}}{2} - 128.25 \text{ mm} \right) \times 250 \text{ mm} \times 325 \text{ mm} - \frac{(180 \text{ mm})^2 \times (100 \text{ mm})^2}{72} + \left(\left(30 \text{ mm} + \frac{180 \text{ mm}}{3} \right) - 213.7 \text{ mm} \right) \times \left(\left(30 \text{ mm} + \frac{180 \text{ mm}}{3} \right) - 128.25 \text{ mm} \right) \times -\frac{180 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2} + 0 \text{ mm}^4 + \left((325 \text{ mm} - \frac{4 \times 125 \text{ mm}}{3\pi}) - 213.7 \text{ mm} \right) \times (125 \text{ mm} - 128.25 \text{ mm}) \times -\frac{\pi}{8} \times (250 \text{ mm})^2$$

$$\overline{I}_{xy} = -51.865 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Las inercias principales (I_{max}, I_{min})

De la teoría del círculo de Mohr, usamos estas ecuaciones para poder hallar las inercias máximas y mínimas como se muestra a continuación:

$$I_{prom} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{34822523.55262361 \text{ mm}^4 + 109946832.53136657 \text{ mm}^4}{2} = 72.384 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{cp} = \left| \frac{I_x - I_y}{2} \right| = \left| \frac{34822523.55262361 \text{ mm}^4 - 109946832.53136657 \text{ mm}^4}{2} \right| = 37.562 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

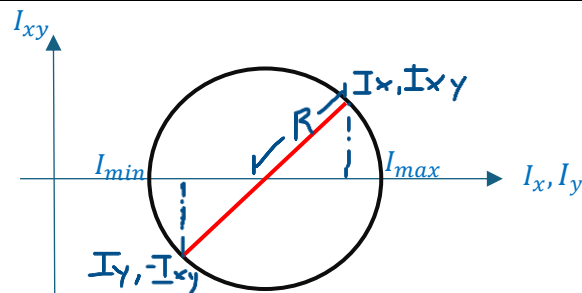
$$R = \sqrt{I_{cp}^2 + \overline{I}_{xy}^2} = \sqrt{(37562154.48937148 \text{ mm}^4)^2 + (-51865212.992797606 \text{ mm}^4)^2} = 64.038 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{máx} = I_{prom} + R = 72384678.0419951 \text{ mm}^4 + 64038392.92699 \text{ mm}^4 = 136.423 \times 10^6 \text{ mm}^4$$


$$I_{mín} = I_{prom} - R = 72384678.0419951 \text{ mm}^4 - 64038392.92699 \text{ mm}^4 = 8.346 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Figura 3

Círculo de Mohr



Nota. Fuente: Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

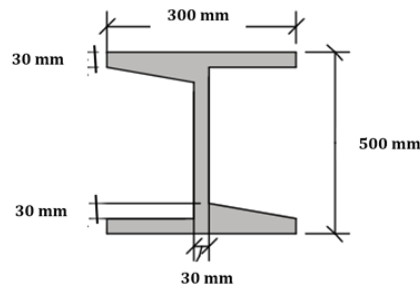
EJERCICIO 8

Para la estructura del punto inmediatamente anterior, determine las propiedades enlistadas de acuerdo a las Sección transversal con dimensiones totalmente conocidas, tal como se muestra en la Figura 1.

- Momentos de Inercia rectangulares con respecto a los ejes centroidales en X y Y.
- El producto de inercia centroidal.
- Los radios de giro de la sección transversal y la zona de tolerancia total definida.

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

Solución 8

Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal de un elemento estructural la cual es una sección compuesta. Por ende, debemos hallar cada uno de los ítems desde el punto de referencia O.

8.1 Hallamos centroides (\bar{x} , \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 2**.

Es por esto por lo que vamos a hallar el centroide de la figura compuesta como ya sabemos hacerlo teniendo en cuenta que tenemos cuatro figuras que componen nuestra sección transversal como se muestra a continuación:

$$\bar{x} = \frac{2 \times \left[(300 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}) \times \frac{300 \text{ mm}}{2} \right] + \frac{135 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}}{2} \times \left(165 \text{ mm} + \frac{135 \text{ mm}}{3} \right) + \frac{135 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}}{2} \times \left(\frac{2 \times 135 \text{ mm}}{3} \right) + (30 \text{ mm} \times 440 \text{ mm}) \times 150 \text{ mm}}{2 \times 300 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} + 2 \times \frac{135 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}}{2} + 30 \text{ mm} \times 440 \text{ mm}}$$

$$\bar{x} = 150 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{(300 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}) \times \left[\frac{30 \text{ mm}}{2} + \left(500 - \frac{30 \text{ mm}}{2} \right) \right] + \frac{135 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}}{2} \times \left[\left(30 \text{ mm} + \frac{30 \text{ mm}}{3} \right) + \left(440 \text{ mm} + \frac{2 \times 30 \text{ mm}}{3} \right) \right] + (30 \text{ mm} \times 440 \text{ mm}) \times \left(30 \text{ mm} + \frac{440 \text{ mm}}{2} \right)}{2 \times 300 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} + 2 \times \frac{135 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}}{2} + 30 \text{ mm} \times 440 \text{ mm}}$$

$$\bar{y} = 250 \text{ mm}$$

Nota: Nos podríamos haber ahorrado el cálculo del valor del centroide en “x” y en “y” debido a que vemos que es simétrico en ambos ejes.


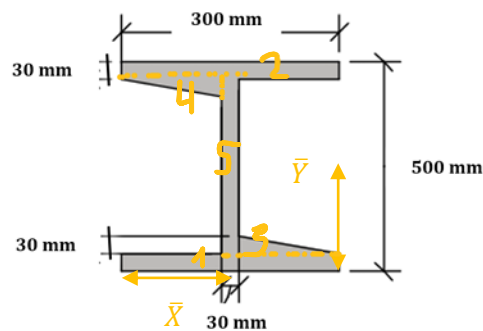
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 2

Centroides de la sección



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016


8.2 Hallamos Momentos de inercia (\bar{I}_x, \bar{I}_y)

Como debemos hallar los momentos de inercia de nuestro logo de Spiderman debemos tener en cuenta las fórmulas de las tablas mostradas en la **Figura 2**, los centroides hallados en el inciso anterior y el teorema de Steiner debido a que nuestra sección se compone de varias figuras de diferente geometría unidas. Donde ya sabemos la inercia global de la figura y despejamos la inercia individual del logo de Spiderman en ambos ejes.

Por último, cabe resaltar que el momento de inercias en “x” usa distancias en “y” y viceversa.

$$\begin{aligned} \bar{I}_x = & 2 \times \left[\frac{300\text{mm} \times (30\text{mm})^3}{12} \right] + 300\text{mm} \times 30\text{mm} \times \left[\left(\frac{30\text{mm}}{2} - 250\text{mm} \right)^2 + \left(\left(500 - \frac{30\text{mm}}{2} \right) - 250\text{mm} \right)^2 \right] + 2 \times \\ & \frac{135\text{mm} \times (30\text{mm})^3}{36} + \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} \times \left[\left(\left(30\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{3} \right) - 250\text{mm} \right)^2 + \left(\left(440\text{mm} + \frac{2 \times 30\text{mm}}{3} \right) - 250\text{mm} \right)^2 \right] + \\ & \frac{30\text{mm} \times (440\text{mm})^3}{12} + 30\text{mm} \times 440\text{mm} \times \left[\left(30\text{mm} + \frac{440\text{mm}}{2} \right) - 250\text{mm} \right]^2 \\ \bar{I}_x = & 1387.167 \times 10^6 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_y = & 2 \times \left[\frac{30\text{mm} \times (300\text{mm})^3}{12} + 300\text{mm} \times 30\text{mm} \times \left[\left(\frac{300\text{mm}}{2} - 150\text{mm} \right)^2 \right] \right] + 2 \times \frac{30\text{mm} \times (135\text{mm})^3}{36} + \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} \times \\ & \left[\left(\left(165\text{mm} + \frac{135\text{mm}}{3} \right) - 150\text{mm} \right)^2 + \left(\left(\frac{2 \times 135\text{mm}}{3} \right) - 150\text{mm} \right)^2 \right] + \frac{440\text{mm} \times (30\text{mm})^3}{12} + 30\text{mm} \times 440\text{mm} \times \\ & [150\text{mm} - 150\text{mm}]^2 \\ \bar{I}_y = & 154.670 \times 10^6 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Producto de inercias (\overline{I}_{xy})

$$\begin{aligned} \overline{I}_{xy} = & 0 \text{ mm}^4 + \left(\frac{30\text{mm}}{2} - 250\text{mm} \right) \times (150\text{mm} - 150\text{mm}) \times (300\text{mm} \times 30\text{mm}) + 0 \text{ mm}^4 + \left(\left(500 - \frac{30\text{mm}}{2} \right) - \right. \\ & 250\text{mm} \left. \right) \times (150\text{mm} - 150\text{mm}) \times (300\text{mm} \times 30\text{mm}) - 2 \times \frac{(135\text{mm})^2 \times (30\text{mm})^2}{72} + \left(\left(30\text{mm} + \frac{100\text{mm}}{3} \right) - \right. \\ & 250\text{mm} \left. \right) \times \left(\left(165\text{mm} + \frac{135\text{mm}}{3} \right) - 150\text{mm} \right) \times \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} + \left(\left(440\text{mm} + \frac{2 \times 30\text{mm}}{3} \right) - 250\text{mm} \right) \times \\ & \left(\left(\frac{2 \times 135\text{mm}}{3} \right) - 150\text{mm} \right) \times \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} + 0\text{mm}^4 + \left(30\text{mm} + \frac{440\text{mm}}{2} \right) - 250\text{mm} \times (150\text{mm} - 150\text{mm}) \times \\ & (30\text{mm} \times 440\text{mm}) \\ \overline{I}_{xy} = & -48.650 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Radio de giro (R_x, R_y)

$$\begin{aligned} R_x = \sqrt{\frac{\overline{I}_x}{A}} &= \sqrt{\frac{1387167500\text{mm}^4}{2 \times 300\text{mm} \times 30\text{mm} + 2 \times \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} + 30\text{mm} \times 440\text{mm}}} = 198.374 \text{ mm} \\ R_y = \sqrt{\frac{\overline{I}_y}{A}} &= \sqrt{\frac{154670625 \text{ mm}^4}{2 \times 300\text{mm} \times 30\text{mm} + 2 \times \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} + 30\text{mm} \times 440\text{mm}}} = 66.24 \text{ mm} \end{aligned}$$

Momento Polar de inercia (J)


$$\begin{aligned} J &= \overline{I}_x + \overline{I}_y \\ J &= 1387167500\text{mm}^4 + 154670625 \text{ mm}^4 \\ J &= 1541.838 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Zona de Tolerancia (k_o)

$$\begin{aligned} k_o &= \sqrt{\frac{J}{A}} \\ k_o &= \sqrt{\frac{1541838125 \text{ mm}^4}{2 \times 300\text{mm} \times 30\text{mm} + 2 \times \frac{135\text{mm} \times 30\text{mm}}{2} + 30\text{mm} \times 440\text{mm}}} \\ k_o &= 209.1413\text{mm} \end{aligned}$$

8.3 Análisis de resultados

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos. Concluimos que la sección transversal analizada es descolgada debido a que las dimensiones en el eje y es mucho más grande que en el eje x. Lo cual se evidencia en los radios de giro.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

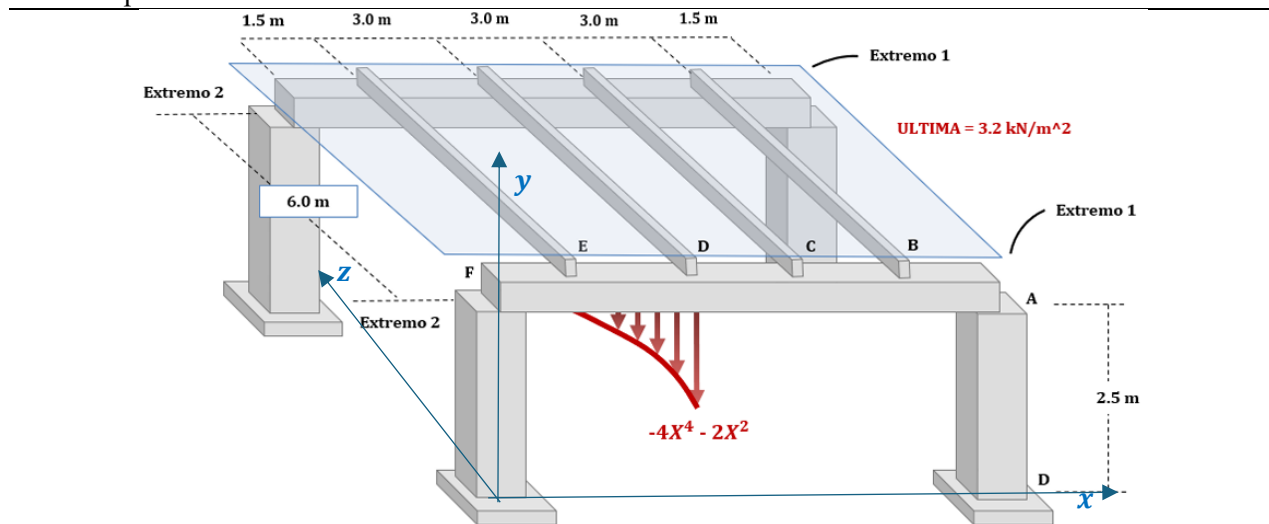
EJERCICIO 9

Un sistema de entrepiso de una estructura tiene algunas variables adicionales arbitrarias como la carga externa que ha sido generada por un letrero de tránsito en el sector DE. Teniendo en cuenta los valores de la **Figura 1** y que la función de carga arbitraria ya ha sido afectada por el factor 1.6 de la combinación ultima por carga viva, y considerando un peso propio de la viga de 5.5 kN/m, también ya afectado por un factor de 1.2 de mayoración, determine:

- a) EL EQUILIBRIO completo de la viga ABCDEF y sus diagramas de fuerzas internas DFC y DMF.

Figura 1

Sección para analizar




Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

Solución 9

Interpretando el ejercicio vemos que la viga ABCDEF está siendo sometida por una fuerza externa distribuida en el eje y en el tramo ED. Además de la transferencia de cargas de las viguetas que soportan el peso propio y la transferencia de la cubierta a viguetas. Teniendo en cuenta esto, se debe primero realizar la transferencia de cargas de la losa a las viguetas por métodos aferentes asumiendo que las viguetas están simplemente apoyadas y luego estas reacciones de las viguetas las soportará la viga ABCDEF la cual está simplemente apoyada en sus extremos por medio de dos columnas.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY después de haber transferido las cargas de la vigueta a la viga debido a que está contenida la viga ABCDEF y las cargas en el plano XY.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

9.1. Identificación de apoyos

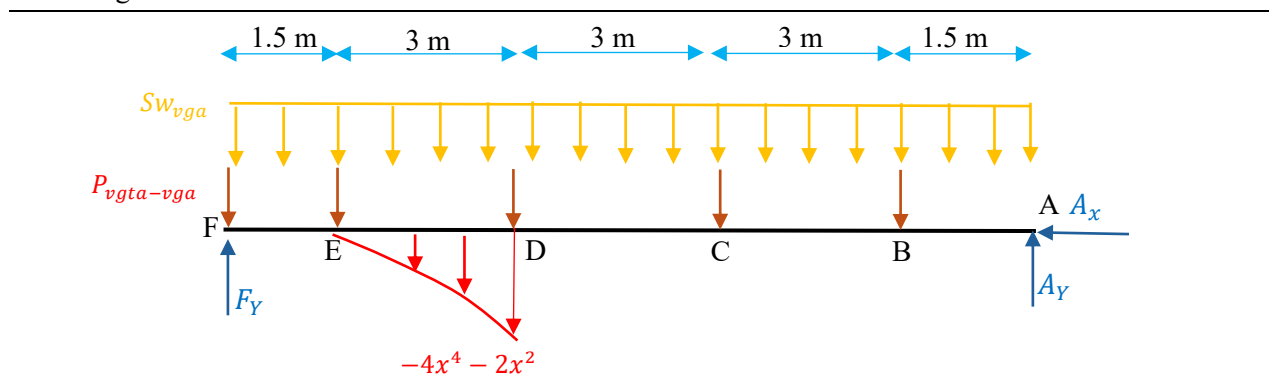
En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo A se identifican un apoyo de segundo orden donde se garantiza una restricción total a desplazamientos y en el apoyo F uno simple. Generando una viga que está completamente restringida. Por último, hay que tener en cuenta que las viguetas están simplemente apoyadas a la viga.

9.2. Realizando un DCL

Realizando un DCL de la viga ABC en el plano XY como se muestra en la **Figura 2**. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra viga en estudio. Además, en la **Figura 3** se muestra un DCL de la vigueta.

Figura 2

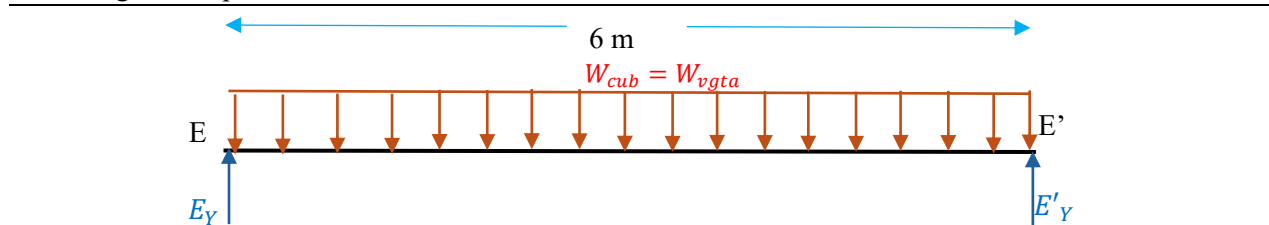
DCL Viga ABC




Nota. Autoría propia.

Figura 3

DCL Viguetas Tipo



Nota. Autoría propia.

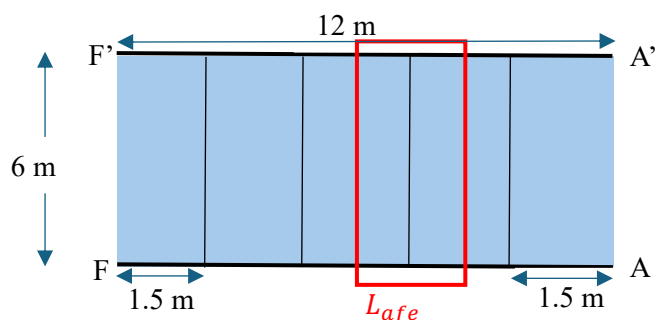
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

9.3. Transferencia de cargas de losa a viguetas por método aferente:

A continuación, se presenta en la **Figura 4** una vista en planta donde se puede evidenciar las aferencias usadas para cada una de las viguetas que conforman la cubierta.

Figura 4

Vista en planta




Nota. Autoría propia.

Cómo se observa en la figura anterior al tratarse de una losa de una dirección y al aplicar el método de aferencias donde cada vigueta toma la mitad de la distancia de losa tanto a su derecha como izquierda. Podemos observar que al tratarse de 4 viguetas y una losa de 12 m de longitud. La aferencia de cada vigueta va a ser igual por lo que cada vigueta va a soportar la misma carga catalogando estas viguetas como “Tipo 1” con un valor de aferencia de 3 m.

Con la carga super impuesta en el área de la losa, la aferencia anteriormente determinada, se procede a transferir la carga de la losa a la vigueta.

$$W_{cub} = 3.2 \frac{KN}{m^2} \times 3 m = 9.6 \frac{KN}{m}$$


Finalmente, la carga que soportará la vigueta es la siguiente:

$$W_{vgta} = W_{cub} = 9.6 \frac{KN}{m}$$


9.4. Equilibrio externo Viguetas:

Cómo se trata de una vigueta simplemente apoyada en cada uno de sus extremos que soporta una carga distribuida uniforme por toda su longitud. Transfiere una carga puntual (reacción) a la viga que se satisface de la siguiente ecuación $\frac{W \times L}{2}$.

$$E_y = E'_y = \frac{9.6 \frac{KN}{m} \times 6m}{2} = 28.8 KN$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Nota: Tener en cuenta que por lo explicado en 9.3 cada vigueta soporta la misma carga.

9.5. Transferencia de cargas de vigueta a viga ABCDEF y Peso propio

Cómo se puede observar en la **Figura 2** representamos las reacciones puntuales de cada vigueta no la podemos representar como una carga uniforme distribuida en la viga ABCDEF. Esto se debe ya que la aferencia entre viguetas es mayor a 1m.

Teniendo en cuenta el peso propio de la viga ABCDEF:

$$Sw_{vga} = 5.5 \frac{KN}{m}$$

9.6. Hallando carga puntual y su ubicación

Para puntualizar las cargas distribuidas sabemos que se hace por medio de sus áreas y teniendo en cuenta que las cargas se ubicarán en su centroide. Obtenemos lo siguiente:

Puntual de $W_1(x)$

$$P_{w1} = \int_0^3 -4x^4 - 2x^2 dx = 212.4 KN \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_1(x)$

$$X_1 = \frac{\int_0^3 (-4x^4 - 2x^2) x dx}{\int_0^3 -4x^4 - 2x^2 dx} = 2.479 m (dist de izq a der)$$


Puntual de Sw_{vga}

$$P_{Sw_{vga}} = \int_0^{12} 5.5 dx \text{ ó } 5.5 \frac{KN}{m} \times 12 m = 66 KN \quad \downarrow$$

Ubicación de Sw_{vga}

$$X_{vga} = \frac{\int_0^{12} (5.5) x dx}{\int_0^{12} 5.5 dx} \text{ ó } \frac{12 m}{2} = 6 m$$

Usamos las integrales para hallar los centroides y fuerzas debido a que no hay tablas o no hay manera de sacar el área de estas figuras de otra manera al ser polinomios diferentes a un grado.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

9.7. Realizando equilibrio para hallar reacciones Viga

Cómo ya se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a realizar equilibrio estático en 2D para la viga de estudio. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el A ya que tiene dos incógnitas o reacciones en dicho punto. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios.

$$\begin{aligned}\sum M_{zA} &= 0 \rightarrow 28.8 \text{ KN} \times (10.5\text{m} + 7.5\text{m} + 4.5\text{m} + 1.5\text{m}) + 212.4 \text{ KN} \times (10.5\text{m} - 2.479 \text{ m}) \\ &\quad + 66 \text{ KN} \times 6\text{m} - F_Y \times 12\text{m} = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow A_y + F_Y - 28.8 \text{ KN} \times 4 - 212.4 \text{ KN} - 66 \text{ KN} = 0 \\ \sum F_x &= 0 \rightarrow A_x = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3x3 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned}F_Y &= 232.57 \text{ KN} \uparrow \\ A_y &= 161.03 \text{ KN} \uparrow \\ A_x &= 0 \text{ KN}\end{aligned}$$

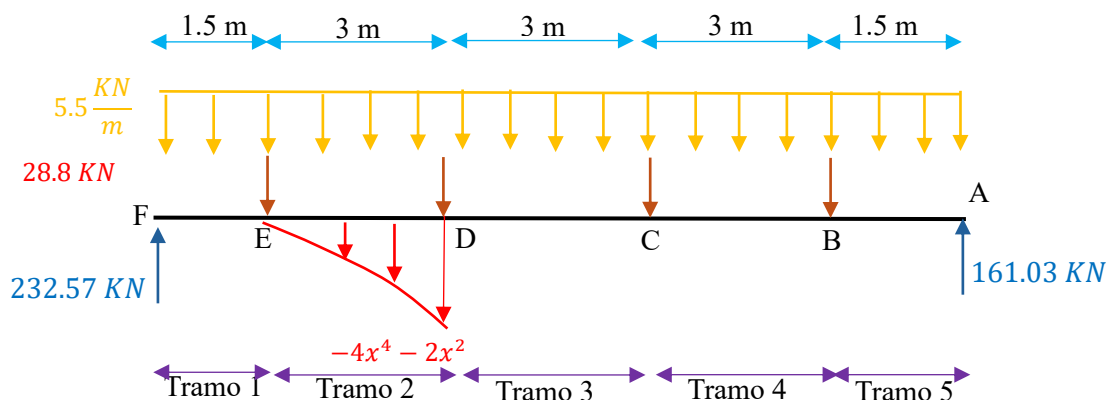
9.8. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos un poco de los tres. Teniendo en cuenta que el método de integrales lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).


Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto por lo que en la **Figura 5** se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.

Figura 5

DCL Viga ABC



Nota. Autoría propia.

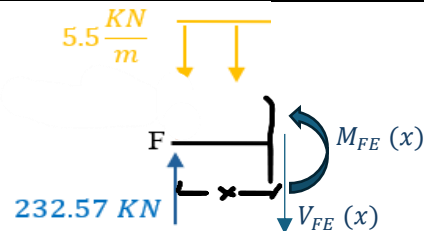
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

9.9. Hallamos fuerzas interna

TRAMO FE $0 \leq x \leq 1.5m$

Figura 6

Corte FE



Nota. Fuente: Autoría propia

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow -V_{FE}(x) - 5.5x + 232.57 = 0$$

$$V_{FE}(x) = -5.5x + 232.57$$

$$V_{FE}(0) = 232.57 \text{ KN} \quad V_{CB}(1.5) = 224.32 \text{ KN}$$

$$\sum M_{FE} = 0 \rightarrow M_{FE}(x) - 232.57x + 5.5x \times \frac{x}{2} = 0$$

$$M_{FE}(x) = -\frac{5.5}{2} x^2 + 232.57x$$

$$M_{CB}(0) = 0 \quad M_{CB}(1.5) = 342.6675 \text{ KN} - m$$

TRAMO ED $0 \leq x \leq 3m$

$$V_{ED}(x) = - \int (5.5) - (-4x^4 - 2x^2) dx + (-28.8) + 224.32$$

$$V_{BA}(x) = -\frac{4x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 5.5x + 195.52$$

$$V_{ED}(0) = 195.52 \text{ KN} \quad V_{ED}(3) = -33.38 \text{ KN}$$


Hallando Cortante cuando vale cero $V_{ED}(x) = 0 \rightarrow x = 2.897 \text{ m}$

$$M_{ED}(x) = \int -\frac{4x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 5.5x + 195.52 \, dx + 342.6675$$

$$M_{ED}(x) = -\frac{4x^6}{30} - \frac{2x^4}{12} - \frac{5.5x^2}{2} + 195.52x + 342.6675$$

$$M_{ED}(0) = 342.6675 \text{ KN} - m \quad M_{ED}(3) = 793.78 \text{ KN} - m$$

Hallando el momento máximo de este tramo $M_{BC}(2.897) = 795.451 \text{ KN} - m$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

TRAMO DC $0 \leq x \leq 3m$ (Por método áreas)

$$V_{DC}(x) = -33.38 - 28.8 - 5.5 \times x$$

$$V_{DC}(x) = -62.18 - 5.5x$$

$$V_{DC}(0) = -62.18 \text{ KN} \quad V_{DC}(3) = -78.68 \text{ KN}$$

Cómo el área de la carga externa es rectangular negativa y solo hay puntuales a inicio de tramo. Por eso el cortante varia linealmente.

$$M_{DC}(x) = 793.78 - (62.18 \times x) - \frac{5.5x^2}{2}$$

$$M_{DC}(x) = 793.78 - 62.18x - \frac{5.5x^2}{2}$$

$$M_{DC}(0) = 793.78 \text{ KN} - m \quad M_{DC}(3) = 582.49 \text{ KN} - m$$

Cómo el área del cortante era un triángulo de valor negativo el valor del momento varía en un polinomio de grado 2 de forma negativa.

TRAMO CB $0 \leq x \leq 3m$ (Por método áreas)

$$V_{CB}(x) = -78.68 - 28.8 - 5.5x$$

$$V_{CB}(x) = -107.48 - 5.5x$$

$$V_{CB}(0) = -107.48 \text{ KN} \quad V_{CB}(3) = -123.98 \text{ KN}$$

Cómo el área de la carga externa es rectangular negativa y solo hay puntuales a inicio de tramo. Por eso el cortante varia linealmente

$$M_{CB}(x) = 582.49 - (107.48 \times x) - \frac{5.5x^2}{2}$$

$$M_{CB}(x) = 582.49 - 107.48x - \frac{5.5x^2}{2}$$

$$M_{CB}(0) = 582.49 \text{ KN} - m \quad M_{CB}(3) = 235.3 \text{ KN} - m$$

Cómo el área del cortante era un triángulo de valor negativo el valor del momento varía en un polinomio de grado 2 de forma negativa.


TRAMO BA $0 \leq x \leq 1.5m$ (Por método áreas)

$$V_{BA}(x) = -123.98 - 28.8 - 5.5x$$

$$V_{BA}(x) = -152.78 - 5.5x$$

$$V_{BA}(0) = -152.78 \text{ KN} \quad V_{BA}(1.5) = -161.03 \text{ KN}$$

Cómo el área de la carga externa es rectangular negativa y solo hay puntuales a inicio de tramo. Por eso el cortante varia linealmente

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$M_{BA}(x) = 235.3 - (152.78 \times x) - \frac{5.5x^2}{2}$$

$$M_{BA}(x) = 235.3 - 152.78x - \frac{5.5x^2}{2}$$

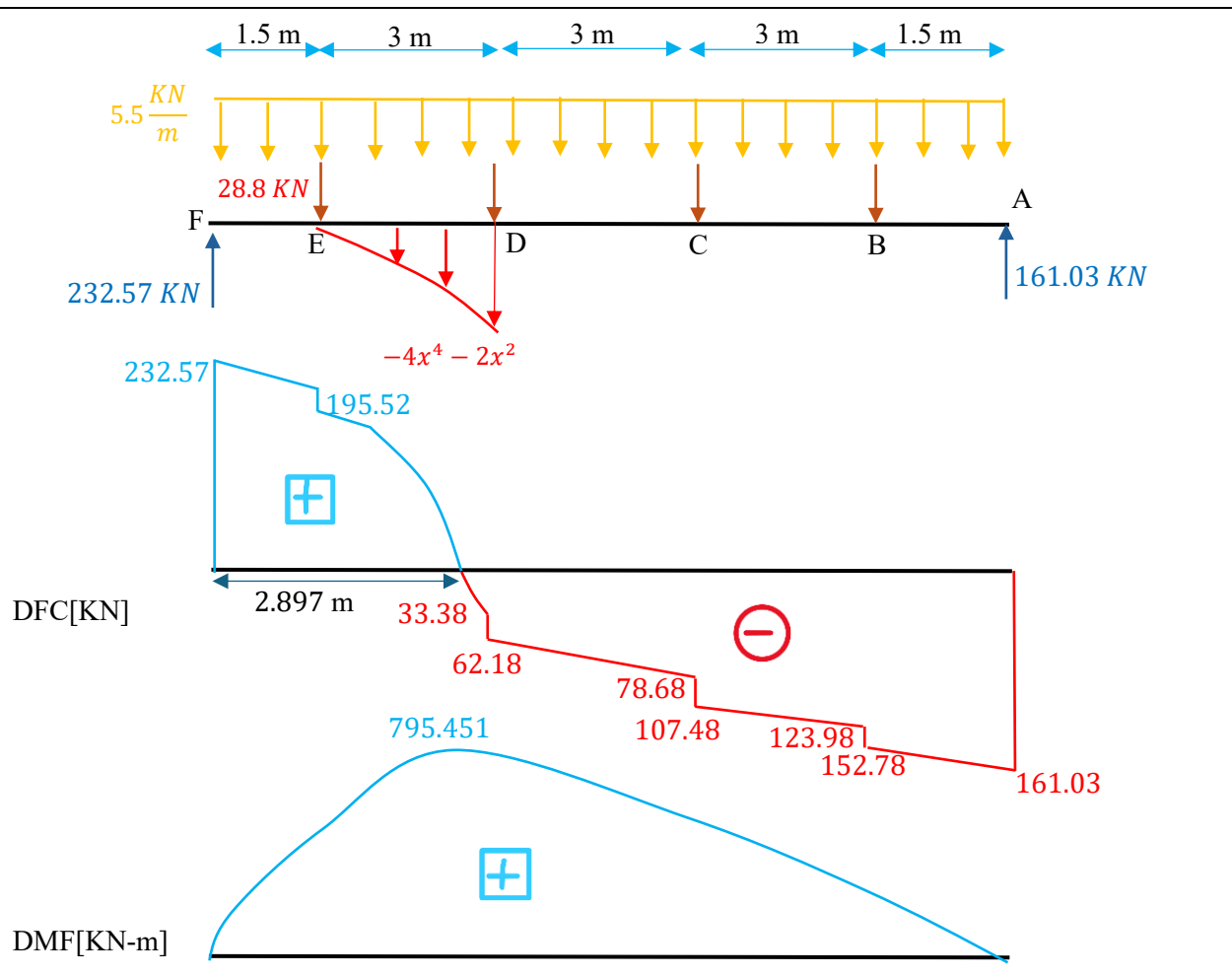
$$M_{BA}(0) = 235.3 \text{ KN} - m \quad M_{BA}(1.5) = 0 \text{ KN} - m$$

Cómo el área del cortante era un triángulo de valor negativo el valor del momento varía en un polinomio de grado 2 de forma negativa.


9.10. Hacemos DFC y DMF

Figura 7

DFC Y DMF Viga ABCDEF



Nota. Autoría propia.

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

EJERCICIO 10

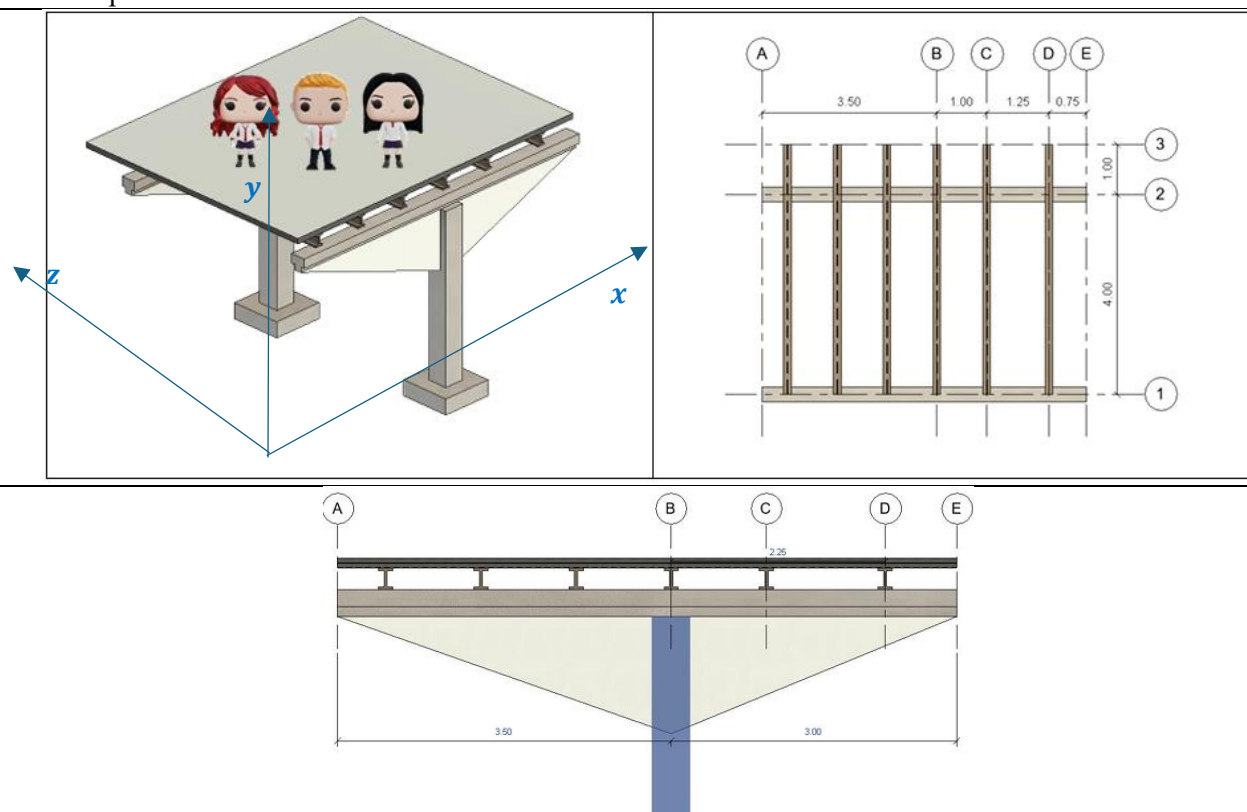
Dos columnas de $400 \times 400 \text{ mm}$ ($24 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$) y un sistema de vigas (0.0691 m^2) se proponen para soportar una carga tipo escenario/reunión y los efectos arbitrarios de cargas de viento que harían caer a los posibles artistas usando la estructura. Revisando las vistas 3D y planta en la **Figura 1**, se puede denotar que existen dos tipos de viguetas continuas (0.0142 m^2 con $70 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$) que transmiten la carga a la viga y luego está a las columnas. Si los artistas a usar la plataforma le solicitan revisar también la Figura 4, donde se puede denotar que las cargas de viento tienen forma triangular de succión con valor máximo de $0.8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ en el eje de la columna y que en ese mismo lugar se “podría generar una junta de dilatación especial” en la viga, intente solucionar:

- El DFC de la viga 1 con sus valores máximos claramente indicados.
- El DMF de la viga 1 con sus valores máximos claramente indicados.


Nota 1: La carga de servicio soportada por placa (incluido su peso y la carga de los artistas) es $6.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ y a carga máxima de viento de succión (hacia arriba) es $0.8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$.

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Solución 10

Interpretando el ejercicio vemos que la viga 1 está siendo sometida por una fuerza externa distribuida en el eje y en toda su longitud. Además de la transferencia de cargas de las viguetas que soportan el peso propio y la transferencia de la cubierta a viguetas. Teniendo en cuenta esto, se debe primero realizar la transferencia de cargas de la losa a las viguetas por métodos aferentes asumiendo que las viguetas están simplemente apoyadas y luego estas reacciones de las viguetas las soportará la viga 1 la cual está empotrada a la columna.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY después de haber transferido las cargas de la vigueta a la viga debido a que está contenida la viga 1 y las cargas en el plano XY.

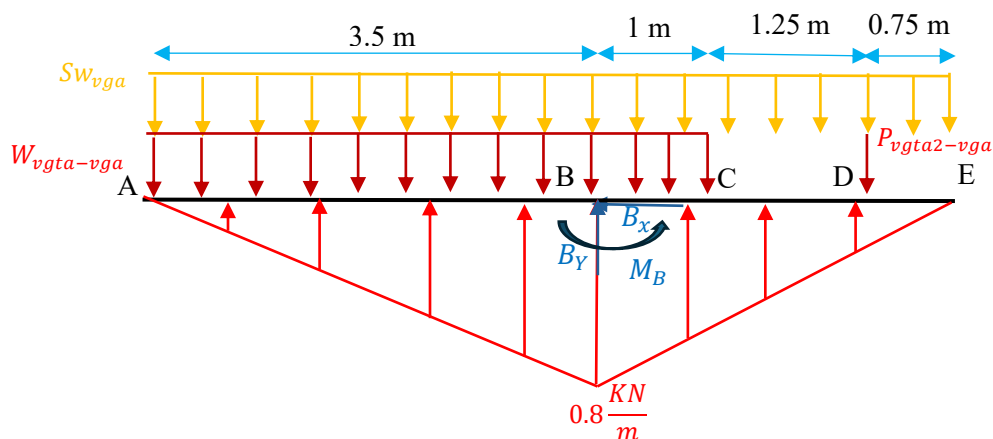
10.1. Identificación de apoyos

En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo B hay un apoyo de tercer orden donde se garantiza una restricción total a desplazamientos y rotaciones. Generando una viga que está completamente restringida. Por último, hay que tener en cuenta que las viguetas están simplemente apoyadas a la viga.

10.2. Realizando un DCL

Realizando un DCL de la viga 1 en el plano XY como se muestra en la **Figura 2**. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra viga en estudio. Además, en la **Figura 3** se muestra un DCL de la vigueta.

Figura 2
DCL Viga ABC



Nota. Autoría propia.


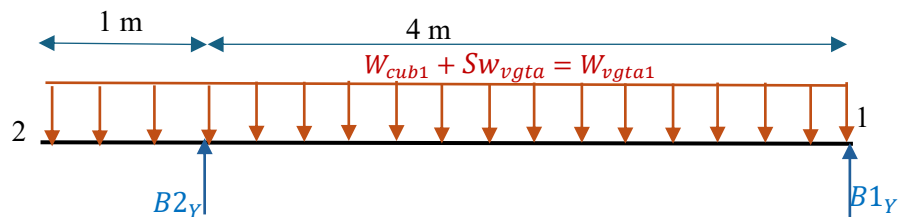
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 3

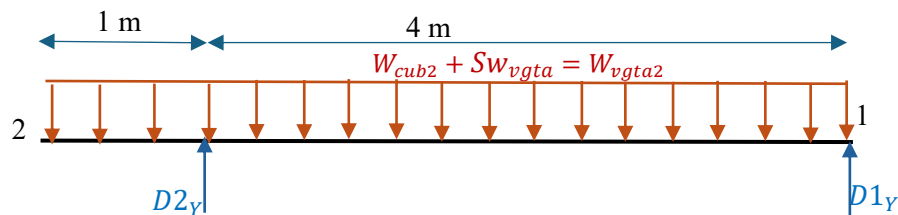
DCL Viguetas Tipo 1



Nota. Autoría propia.

Figura 4

DCL Viguetas Tipo 2



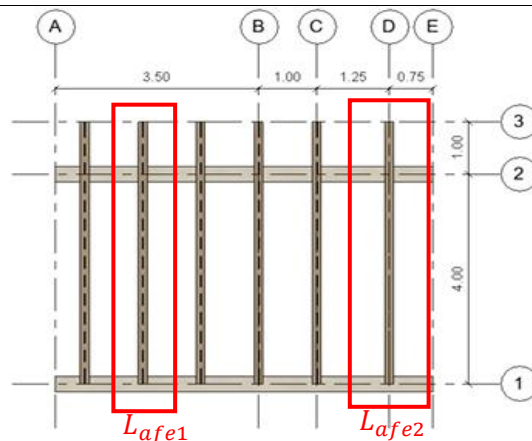
Nota. Autoría propia.

10.3. Transferencia de cargas de losa a viguetas por método aferente:


A continuación, se presenta en la **Figura 5** una vista en planta donde se puede evidenciar las aferencias usadas para cada una de las viguetas que conforman la cubierta.

Figura 5

Vista en planta



Nota. Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Cómo se observa en la figura anterior al tratarse de una losa de una dirección y al aplicar el método de aferencias donde cada vigueta toma la mitad de la distancia de losa tanto a su derecha como izquierda. Podemos observar que al tratarse de 6 viguetas y una losa de 6.5 m de longitud. La aferencia de 5 viguetas es iguales por lo que va a soportar la misma carga catalogando estas viguetas como “Tipo 1” con un valor de aferencia de 1 m y una única vigueta con aferencia de 1.5m la cual se catalogara como vigueta “Tipo 2”.

Con la carga super impuesta en el área de la losa, la aferencia anteriormente determinada y su peso propio, se procede a transferir la carga de la losa a los dos tipos de vigueta.

$$W_{cub1} = 6.0 \frac{KN}{m^2} \times 1 m = 6 \frac{KN}{m}$$

$$W_{cub2} = 6.0 \frac{KN}{m^2} \times 1.5 m = 9 \frac{KN}{m}$$

$$Sw_{vgta} = 70 \frac{KN}{m^3} \times 0.0142 m^2 \cong 1 \frac{KN}{m}$$

Finalmente, la carga que soportará la vigueta es el siguiente considerando su peso propio:

$$W_{vgta1} = W_{cub1} + Sw_{vgta} = 7 \frac{KN}{m}$$

$$W_{vgta2} = W_{cub2} + Sw_{vgta} = 10 \frac{KN}{m}$$

10.4. Equilibrio externo Viguetas:

Cómo se trata de una vigueta simplemente apoyada en dos puntos que soporta una carga distribuida uniforme por toda su longitud. Se procede a realizar equilibrio externo, donde hacemos momentos en ej eje 2 para hallar la reacción en 1. La cual es la que se transfiere una carga puntual (reacción) a las vigas.

Vigueta tipo 1

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow B_{y1} \times 4m - 7 \frac{KN}{m} \times 5m \times 1.5m = 0 \rightarrow B_{y1} = 13.125 KN$$

Vigueta tipo 2

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow B_{y1} \times 4m - 10 \frac{KN}{m} \times 5m \times 1.5m = 0 \rightarrow B_{y1} = 18.75 KN = P_{vgta2-vgta}$$


10.5. Transferencia de cargas de vigueta a viga 1 y Peso propio

Cómo se puede observar en la **Figura 2** representamos las reacciones puntuales de las 5 viguetas las podemos representar como una carga uniforme distribuida en la viga 1. Esto se debe ya que la aferencia entre viguetas es igual a 1m. La sexta vigueta toca analizarla como puntual y está ubicada en D.

$$W_{vgta1-vgta} = \frac{13.125 KN}{1 m} = 13.125 \frac{KN}{m}$$

Teniendo en cuenta el peso propio de la viga 1:

$$Sw_{vga} = 24 \frac{KN}{m^3} \times 0.0691 m^2 = 1.66 \frac{KN}{m}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

10.6. Hallando carga puntual y su ubicación

Para puntualizar las cargas distribuidas sabemos que se hace por medio de sus áreas y teniendo en cuenta que las cargas se ubicarán en su centroide. Obtenemos lo siguiente:

Ecuación de carga de succión tramo AB

$$W_1(x) = \frac{0.8}{3.5}x$$

Ecuación de carga de succión tramo BE

$$W_2(x) = -\frac{0.8}{3}x + 0.8$$

Puntual de $W_1(x)$

$$P_{w1} = \int_0^{3.5} \frac{0.8}{3.5}x \, dx \quad \text{ó} \quad \frac{3.5 \times 0.8}{2} = 1.4 \, \text{KN} \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_1(x)$

$$X_1 = \frac{\int_0^{3.5} \left(\frac{0.8}{3.5}x\right)x \, dx}{\int_0^{3.5} \frac{0.8}{3.5}x \, dx} \quad \text{ó} \quad \frac{2 \times 3.5m}{3} = 2.33 \, \text{m} \, (\text{dist de izq a der})$$

Puntual de $W_2(x)$

$$P_{w2} = \int_0^3 -\frac{0.8}{3}x + 0.8 \, dx \quad \text{ó} \quad \frac{0.8 \times 3}{2} = 1.2 \, \text{KN} \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_2(x)$

$$X_2 = \frac{\int_0^3 \left(-\frac{0.8}{3}x + 0.8\right)x \, dx}{\int_0^3 \left(-\frac{0.8}{3}x + 0.8\right) \, dx} \quad \text{ó} \quad \frac{3m}{3} = 1 \, \text{m} \, (\text{dist de izq a der})$$

Puntual de Sw_{vga}

$$P_{Sw_{vga}} = \int_0^{6.5} 1.66 \, dx \quad \text{ó} \quad 1.66 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \times 6.5 \, \text{m} = 10.79 \, \text{KN} \quad \downarrow$$

Ubicación de Sw_{vga}

$$X_{vga} = \frac{\int_0^{6.5} (1.66)x \, dx}{\int_0^{6.5} 1.66 \, dx} \quad \text{ó} \quad \frac{6.5 \, \text{m}}{2} = 3.25 \, \text{m}$$


Puntual de $W_{vgta1-vga}$

$$P_{vgta1-vga} = \int_0^{4.5} 13.125 \, dx \quad \text{ó} \quad 13.125 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \times 4.5 \, \text{m} = 59.0625 \, \text{KN} \quad \downarrow$$

Ubicación de $W_{vgta1-vga}$

$$X_{vgta1-vga} = \frac{\int_0^{4.5} (13.125)x \, dx}{\int_0^{4.5} 13.125 \, dx} \quad \text{ó} \quad \frac{4.5 \, \text{m}}{2} = 2.25 \, \text{m}$$

Usamos las integrales para hallar los centroides y fuerzas debido a que no hay tablas o no hay manera de sacar el área de estas figuras de otra manera al ser polinomios diferentes a un grado.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

10.7. Realizando equilibrio para hallar reacciones Viga

Cómo ya se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a realizar equilibrio estático en 2D para la viga de estudio. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el B ya que tiene tres incógnitas o reacciones en dicho punto. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios.

$$\sum M_{z_B} = 0 \rightarrow 59.0625 \text{ KN} \times 1.25 \text{ m} + 10.79 \text{ KN} \times 0.25 \text{ m} - 1.4 \text{ KN} \times 1.17 \text{ m} + 1.2 \text{ KN} \times 1 \text{ m} + M_B - 18.75 \text{ KN} \times 2.25 \text{ m} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y - 59.0625 \text{ KN} - 10.79 \text{ KN} + 1.4 \text{ KN} + 1.2 \text{ KN} - 18.75 \text{ KN} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3x3 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned} M_B &= -33.9 \text{ KN} - m \\ B_y &= 86 \text{ KN} \\ B_x &= 0 \text{ KN} \end{aligned}$$

10.8. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos integrales, teniendo en cuenta que este método lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).

Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto por lo que en la **Figura 6** se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.


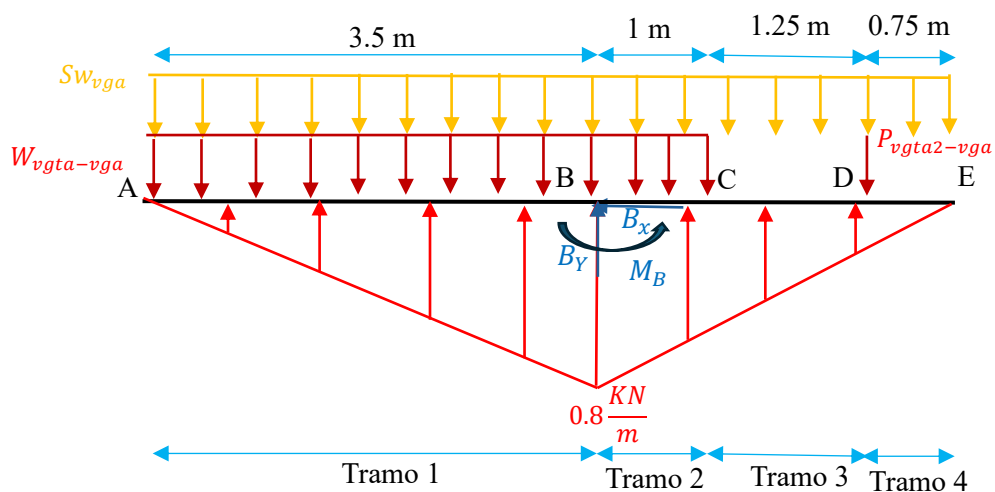
 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 6

DCL Viga ABC con Tramos



Nota. Autoría propia.

10.9. Hallamos fuerzas internas

TRAMO AB $0 \leq x \leq 3.5 \text{ m}$

$$V_{AB}(x) = - \int \left(13.125 + 1.66 - \frac{0.8}{3.5} x \right) dx + 0$$

$$V_{AB}(x) = \frac{0.8}{7} x^2 - 14.785 x$$

$$V_{AB}(0) = 0 \text{ KN} \quad V_{AB}(3.5) = -50.3475 \text{ KN}$$

$$M_{AB}(x) = \int \frac{0.8}{7} x^2 - 14.785 x dx$$

$$M_{AB}(x) = \frac{0.8}{21} x^3 - 14.785 \frac{x^2}{2}$$


$$M_{AB}(0) = 0 \quad M_{AB}(3.5) = -88.925 \text{ KN} - m$$

TRAMO BC $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_{BC}(x) = - \int 13.125 + 1.66 - \left(-\frac{0.8}{3} x + 0.8 \right) dx + (-50.3475) + 86$$

$$V_{BC}(x) = -\frac{0.8}{6} x^2 - 13.985 x + 35.6525$$

$$V_{BC}(0) = 35.6525 \text{ KN} \quad V_{BC}(1) = 21.5342 \text{ KN}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$M_{BC}(x) = \int -\frac{0.8}{6}x^2 - 13.985x + 35.6525 \, dx - (-33.9) + (-88.925)$$

$$M_{BC}(x) = -\frac{0.8}{18}x^3 - \frac{13.985x^2}{2} + 35.6525x - 55.025$$

$$M_{BC}(0) = -55.025 \, \text{KN} - m \quad M_{BC}(1) = -26.4094 \, \text{KN} - m$$

TRAMO CD $0 \leq x \leq 1.25 \, m$

$$V_{CD}(x) = -\int 1.66 - \left(-\frac{0.8}{3}x + 0.533\right) dx + (21.5342)$$

$$V_{CD}(x) = -\frac{0.8}{6}x^2 - 1.127x + 21.5342$$

$$V_{CD}(0) = 21.5342 \, \text{KN} \quad V_{CD}(1.25) = 19.917 \, \text{KN}$$

$$M_{CD}(x) = \int -\frac{0.8}{6}x^2 - 1.127x + 21.5342 \, dx + (-26.4094)$$

$$M_{CD}(x) = -\frac{0.8}{18}x^3 - \frac{1.127x^2}{2} + 21.5342x - 26.4094$$

$$M_{CD}(0) = -26.4094 \, \text{KN} - m \quad M_{CD}(1.25) = -0.4589 \, \text{KN} - m$$

TRAMO DE $0 \leq x \leq 0.75 \, m$

$$V_{DE}(x) = -\int 1.66 - \left(-\frac{0.8}{3}x + 0.1997\right) dx + (-18.75) + 19.917$$


$$V_{DE}(x) = -\frac{0.8}{6}x^2 - 1.4603x + 1.167$$

$$V_{DE}(0) = 1.167 \, \text{KN} \quad V_{DE}(0.75) = 0 \, \text{KN}$$

$$M_{DE}(x) = \int -\frac{0.8}{6}x^2 - 1.4603x + 1.167 \, dx + (-0.4589)$$

$$M_{DE}(x) = -\frac{0.8}{18}x^3 - \frac{1.4603x^2}{2} + 1.167x - 0.4589$$

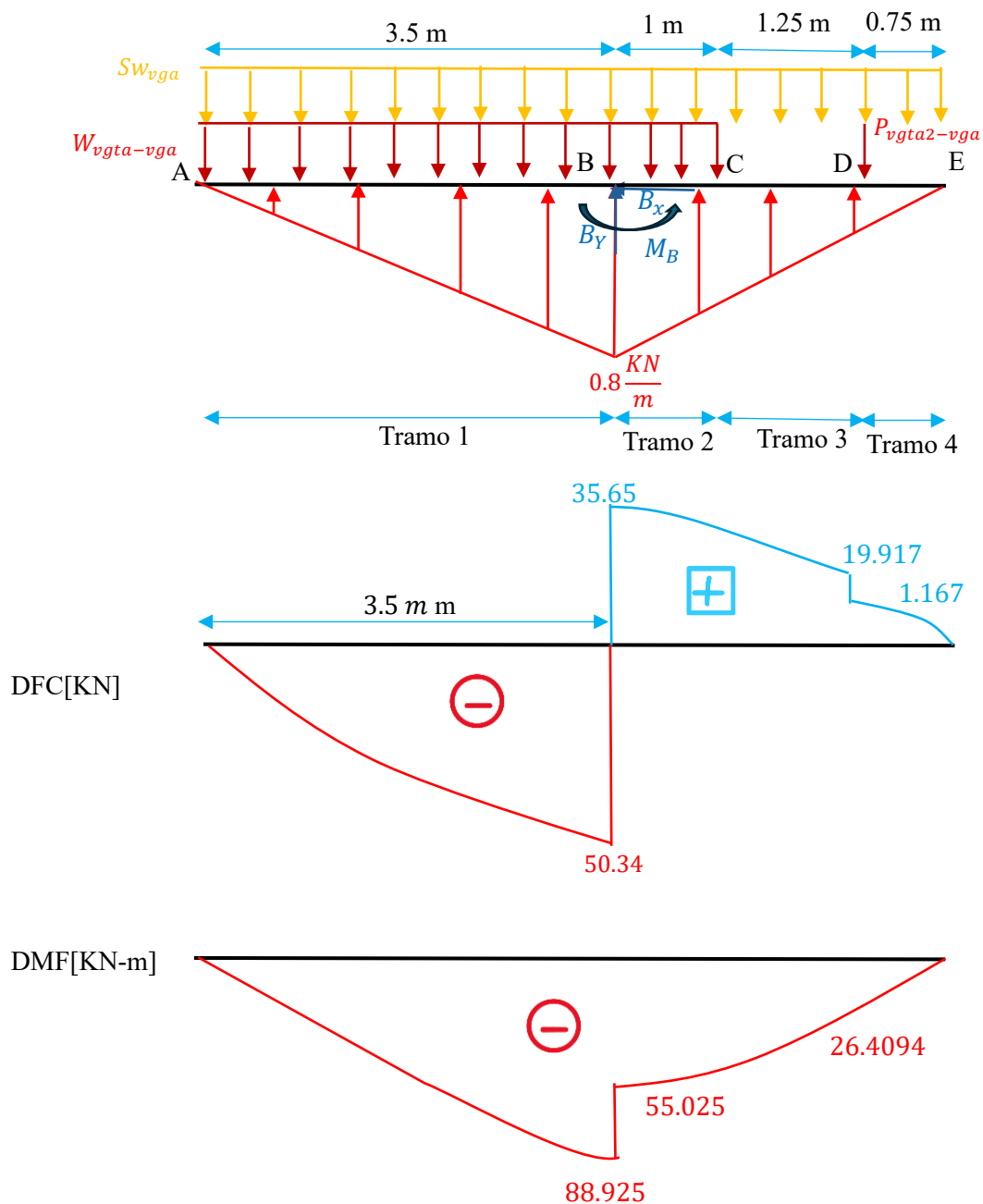
$$M_{DE}(0) = -0.4589 \, \text{KN} - m \quad M_{DE}(0.75) = 0 \, \text{KN} - m$$

 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		


10.10. Hacemos DFC y DMF

Figura 7

DFC Y DMF Viga 1



Nota. Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

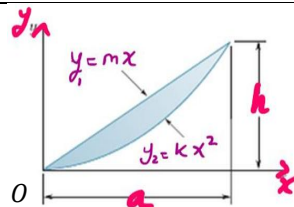
EJERCICIO 11

Teniendo en cuenta que $a = 4\text{ m}$ y $h = 4\text{ m}$ de grupo, plantee las integrales necesarias y calcule:

- El primer momento de área respecto del eje $y = \frac{h}{2}$.
- El primer momento de área respecto del eje $x = \frac{a}{2}$.

Figura 1

Sección para analizar



Nota. Parcial_Tema4a6_Estatica2024I

Solución 11

Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal formada por 2 ecuaciones polinómicas como se muestra en la **Figura 1**. Por ende, debemos hallar el primer momento de inercia desde el punto de referencia O.

11.1 Hallamos centroides (\bar{x}, \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 1**.

Es por esto por lo que vamos a hallar el centroide de la figura compuesta como ya sabemos hacerlo teniendo en cuenta que tenemos dos ecuaciones que componen nuestra sección transversal, donde sabemos que al integrar hallamos el área bajo la curva como se muestra a continuación:

Hallamos ecuaciones de la sección transversal

$$m = \frac{4 - 0}{4 - 0} = 1$$

$$y_1(x) = x$$


$$x_1(y) = y$$

$$y_2(4) = 4 \rightarrow 4 = k \times (4)^2$$

$$k = 0.25$$

$$y_2(x) = 0.25 \times x^2$$

$$x_2(y) = \sqrt{\frac{y}{0.25}}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Hallamos área y centroide de cada figura

$$A_1(x) = \int_0^4 x \, dx \text{ ó } \frac{4m \times 4m}{2} = 8 \, m^2$$

$$x_1 = \frac{\int_0^4 x \times x \, dx}{\int_0^4 x \, dx} \text{ ó } \frac{2}{3} \times 4m = \frac{8}{3} \, m$$

$$A_1(y) = \int_0^4 y \, dx \text{ ó } \frac{4m \times 4m}{2} = -8 \, m^2$$

$$y_1 = \frac{\int_0^4 y \times y \, dx}{\int_0^4 y \, dx} \text{ ó } \frac{2}{3} \times 4m = \frac{8}{3} \, m$$

$$A_2(x) = \int_0^4 0.25 \times x^2 \, dx = -\frac{16}{3} \, m^2$$

$$x_2 = \frac{\int_0^4 0.25 \times x^2 \times x \, dx}{\int_0^4 0.25 \times x^2 \, dx} = 3 \, m$$

$$A_2(y) = \int_0^4 \sqrt{\frac{y}{0.25}} \, dy = 10.667 \, m^2$$

$$y_2 = \frac{\int_0^4 \sqrt{\frac{y}{0.25}} \times y \, dy}{\int_0^4 \sqrt{\frac{y}{0.25}} \, dy} = 2.4 \, m$$

Finalmente hallando centroide general:

$$\bar{x} = \frac{8 \, m^2 \times \frac{8m}{3} - \frac{16}{3} \, m^2 \times 3 \, m}{8 \, m^2 - \frac{16}{3} \, m^2}$$

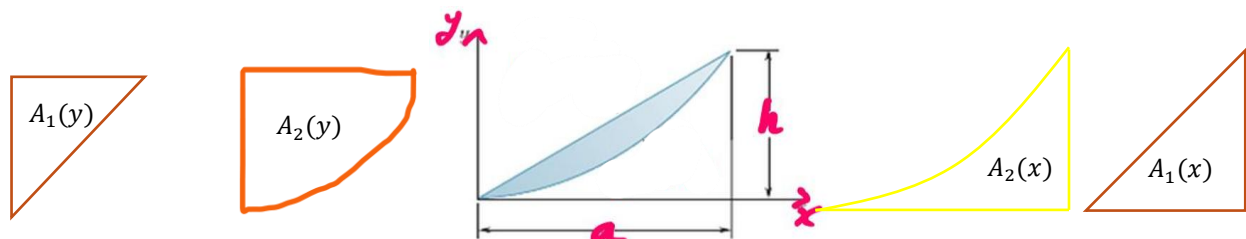
$$\bar{x} = 2 \, m$$


$$\bar{y} = \frac{-8 \, m^2 \times \frac{8m}{3} + 10.667 \, m^2 \times 2.4 \, m}{-8 \, m^2 + 10.667 \, m^2}$$

$$\bar{y} = 1.6 \, m$$

Figura 2

Centroides de la sección



 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

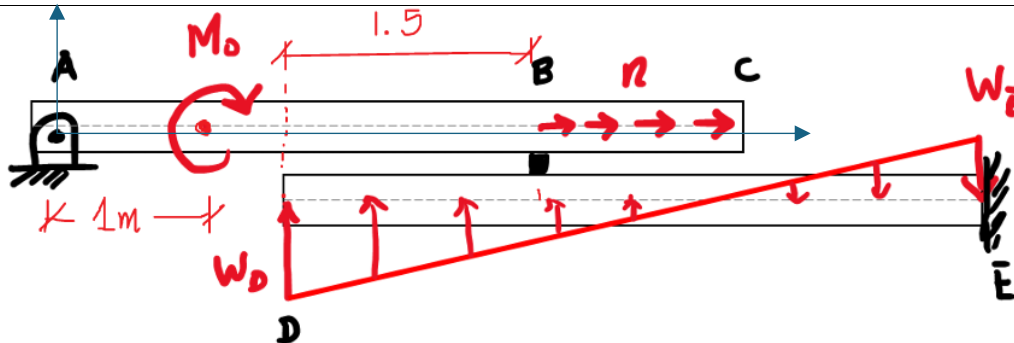
EJERCICIO 12

La viga ABC se apoya sobre la viga DE mediante un apoyo de neopreno que solo transmite fuerzas verticales. Determine:

- Las reacciones en los apoyos A, B y E.
- El diagrama de fuerza axial y los valores máximos (+ y -) en la viga ABC.
- El diagrama de fuerza cortante en la viga DE y los valores máximos (+ y -) en la viga DE.
- El diagrama de momento flector y los valores máximos (+ y -) en la viga DE.

Figura 1

Viga inclinada de concreto.



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

- Nota 1: $\overline{AB} = 3\text{ m}$, $\overline{BC} = 1\text{ m}$, $\overline{DE} = 4.5\text{ m}$, $M_o = 3\text{ KN} - \text{m}$, $n = 3\frac{\text{KN}}{\text{m}}$, $w_D = 5\frac{\text{KN}}{\text{m}}$, $w_E = 4\frac{\text{KN}}{\text{m}}$

Solución 12


Interpretando el ejercicio vemos que la viga ABC está siendo sometida por una fuerza externa distribuida en el eje x en el tramo BC. Además de un momento puntual en el tramo AB. Por otro lado, tiene una conexión simple en B con la viga DE. Donde esta viga DE está sometida a una carga distribuida en toda su longitud.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY debido a que está contenida la viga y las cargas en el plano XY.

2.1. Identificación de apoyos

En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo A se identifican un apoyo de segundo orden donde se garantiza una restricción en el eje Y positivo y en X. En el apoyo B una conexión “articulada” que solo transmite fuerzas en “y” y en E se puede observar un apoyo de tercer orden. Generando una viga que está completamente restringida. También nos damos cuenta de que nuestra viga es hiperestática ya que tenemos 4 reacciones por hallar para las 3 ecuaciones que nos da el equilibrio estático en 2D. Por ende, el GIE externo queda:

$$GIE = \text{reacciones} - \text{ecuaciones} = 4 - 3 = 1$$

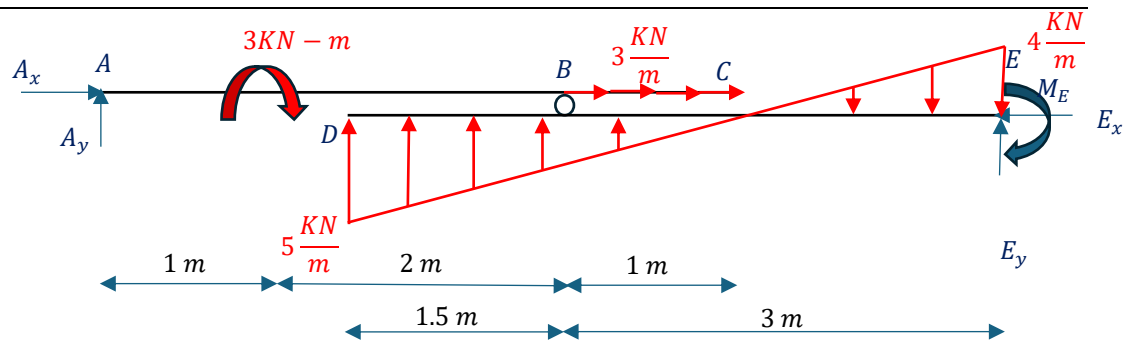
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

12.2. Realizando un DCL

Realizando un DCL de la viga ABCD en el plano XY como se muestra en la **Figura 2**. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra viga en estudio.

Figura 2

DCL Viga ABCD



Nota. Autoría propia. La circunferencia en el punto B indica que hay un apoyo de neopreno.

12.3. Hallando ecuaciones de carga

Como se observa en la **Figura 2** debemos hallar las ecuaciones que me describan cada una de las cargas a las que está sometida la viga.


$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= mx + b \\
 m &= \frac{4 - (-5)}{4.5 - 0} = 2 \\
 W_1(0) &= -5 \rightarrow b = -5 \\
 W_1(x) &= 2x - 5 \\
 W_1(x) &= 0 \rightarrow x = 2.5 \text{ m}
 \end{aligned}$$

12.4. Realizando equilibrio y despieces para hallar reacciones

Cómo nos dimos cuenta en el GIE la viga en estudio es hiperestática. Sin embargo, al haber un apoyo de neopreno en B se puede realizar un despiece de la viga donde vamos a poder analizar y realizar equilibrio en cada uno de estos despieces. Con la finalidad de hallar cada una de las reacciones.

De la misma manera ya que se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a iniciar realizando equilibrio estático en 2D en el despiece isostático como se muestra en la **Figura 3**. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el A ya que tiene dos incógnitas o reacciones en dicho punto. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios.

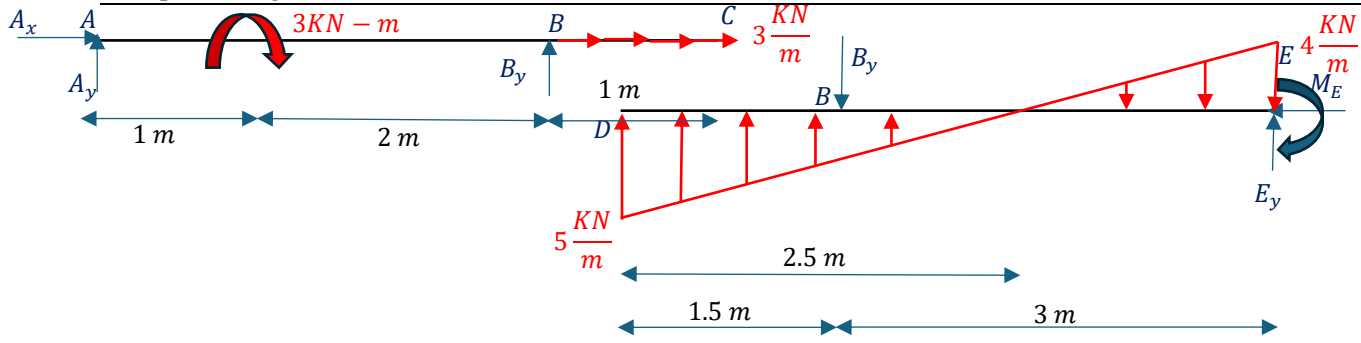
A continuación, se presenta el despiece de la viga (gracias al apoyo de neopreno en B), donde debemos tener en cuenta que al ser conexión únicamente se transmitirán fuerzas y NO momentos. Además, debemos usar

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

la tercera ley de newton donde sabemos que al transmitirse la fuerza en B los 2 despieces van a tener igual magnitud de reacción en B pero sentidos contrarios.

Figura 3

Despieces Viga



Nota. Autoría propia. La circunferencia en el punto B indica que hay un apoyo de neopreno.

Iniciamos realizando equilibrio en el despiece de la izquierda, debido a que es el despiece isostático ya que su GIE es igual a cero.

$$\sum M_{z_A} = 0 \rightarrow -3 \text{ KN} - m + B_y \times 3m = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + 3 \frac{\text{KN}}{m} \times 1m = 0$$

cResolviendo el sistema de ecuaciones 2x2 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned} A_y &= -1 \text{ KN} \\ B_y &= 1 \text{ KN} \\ A_x &= 3 \text{ KN} \end{aligned}$$

Ahora realizando equilibrio en el despiece de la derecha, se obtiene lo siguiente:


$$\sum M_{z_E} = 0 \rightarrow -M_E + 1 \text{ KN} \times 3m - \frac{5 \frac{\text{KN}}{m} \times 2.5m}{2} \times \left(2m + \frac{2}{3} \times 2.5m\right) + \frac{4 \frac{\text{KN}}{m} \times 2m}{2} \times \frac{2m}{3} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -B_y + E_y + \frac{5 \frac{\text{KN}}{m} \times 2.5m}{2} - \frac{4 \frac{\text{KN}}{m} \times 2m}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow E_x = 0$$

cResolviendo el sistema de ecuaciones 2x2 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned} M_E &= -17.25 \text{ KN} - m \\ E_y &= -1.25 \text{ KN} \end{aligned}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

El signo contrario quiere indicarnos que la reacción va contraria a como la dibujamos en el DCL que se presenta en la **Figura 3**.

12.5. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos integrales, teniendo en cuenta que este método lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).

Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto por lo que en la Figura 4 se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.

12.5. Hallamos fuerzas internas

TRAMO AA' $0 \leq x \leq 1m$

$$V_{AA'}(x) = -1$$

$$V_{AA'}(0) = -1 \text{ KN} \quad V_{AA'}(1) = -1 \text{ KN}$$

$$M_{AA'}(x) = \int -1 dx$$

$$M_{AA'}(x) = -x$$

$$M_{AA'}(0) = 0 \quad M_{AA'}(1) = -1 \text{ KN} - m$$

$$N_{AA'}(x) = -(-3) = 3$$

$$N_{AA'}(0) = 3 \text{ KN} \quad N_{AA'}(1) = 3 \text{ KN}$$

TRAMO A'B $0 \leq x \leq 2m$

$$V_{A'B}(x) = -1$$

$$V_{A'B}(0) = -1 \text{ KN} \quad V_{A'B}(2) = -1 \text{ KN}$$


$$M_{A'B}(x) = \int -1 dx - (-3) + (-1)$$

$$M_{A'B}(x) = -x + 2$$

$$M_{A'B}(0) = 2 \text{ KN} - m \quad M_{A'B}(2) = 0 \text{ KN} - m$$

$$N_{A'B}(x) = 3$$

$$N_{A'B}(0) = 3 \text{ KN} \quad N_{A'B}(2) = 3 \text{ KN}$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

TRAMO BC $0 \leq x \leq 1m$

$$V_{BC}(x) = -1 + 1 = 0$$

$$V_{BC}(x) = 0$$

$$V_{BC}(0) = 0 \text{ KN} \quad V_{BC}(1) = 0 \text{ KN}$$

$$N_{CD}(x) = 3 - \int 3 \frac{\text{KN}}{m} dx$$

$$N_{CD}(x) = 3 - 3x$$

$$N_{CD}(0) = 3 \text{ KN} \quad N_{CD}(1) = 0 \text{ KN}$$

VIGA DBE

TRAMO DB $0 \leq x \leq 1.5m$

$$V_{DB}(x) = - \int 2x - 5 \, dx$$

$$V_{DB}(x) = -x^2 + 5x$$

$$V_{DB}(0) = 0 \text{ KN} \quad V_{DB}(1.5) = 5.25 \text{ KN}$$

$$M_{DB}(x) = \int -x^2 + 5x \, dx$$

$$M_{DB}(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2$$

$$M_{DB}(0) = 0 \text{ KN} - m \quad M_{DB}(1.5) = 4.5 \text{ KN} - m$$

TRAMO BE $0 \leq x \leq 3m$

$$W_1(1.5) = 2(1.5) - 5 = -2$$

$$W_1(x) = 2x - 5$$

$$V_{BE}(x) = - \int 2x - 2 \, dx + 5.25 + (-1)$$


$$V_{BE}(x) = -x^2 + 2x + 4.25$$

$$V_{BE}(0) = 4.25 \text{ KN} \quad V_{BE}(3) = 1.25 \text{ KN}$$

$$M_{BE}(x) = \int -x^2 + 2x + 4.25 \, dx + 4.5$$

$$M_{BE}(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 4.25x + 4.5$$

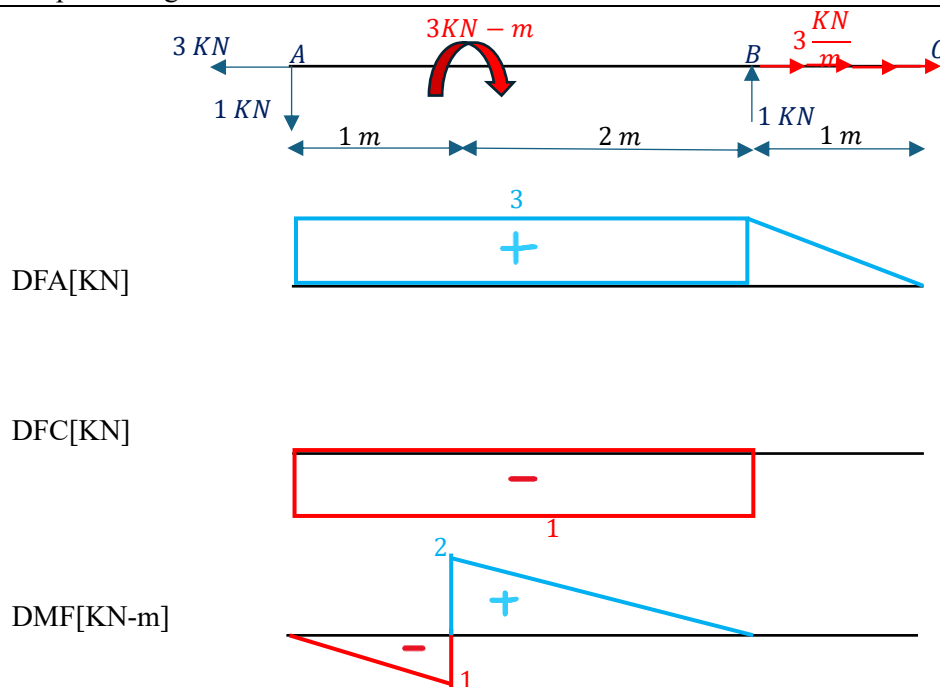
$$M_{BE}(0) = 4.5 \text{ KN} - m \quad M_{BE}(3) = 17.25 \text{ KN} - m$$


 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

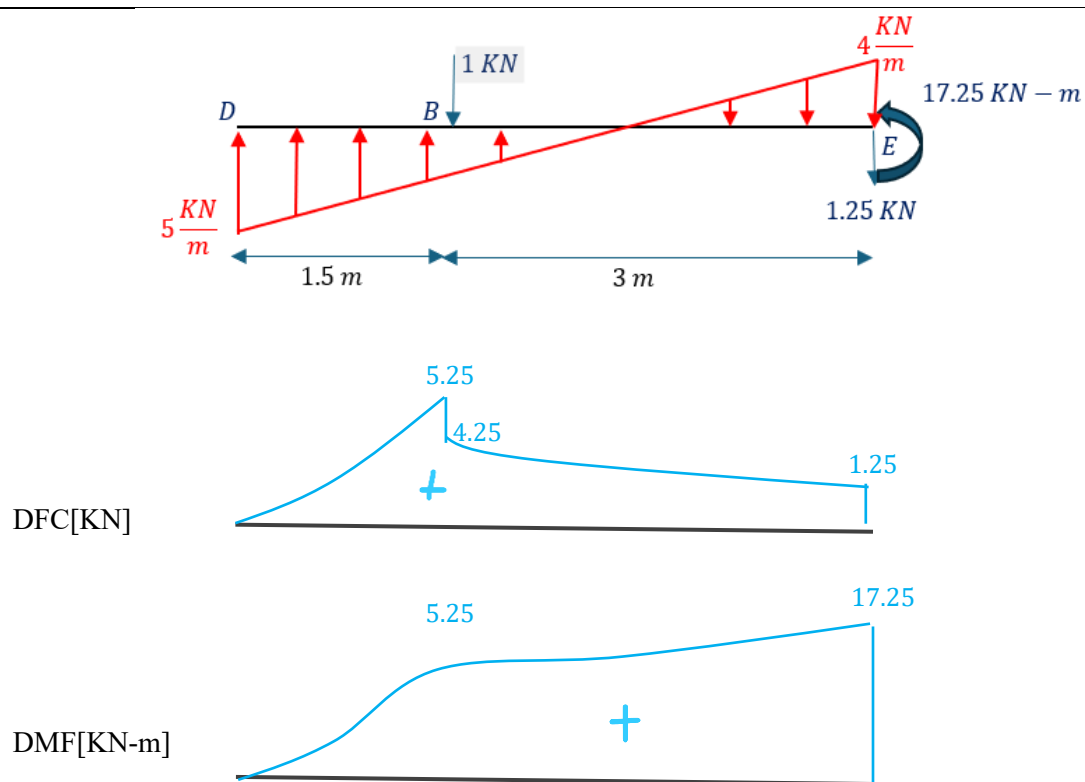
12.6. Hacemos DFC y DMF

Figura 3


Despieces Vega



 ESCUELA DE INGENIERIA Civil MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		



Nota. Autoría propia. La circunferencia en el punto B indica que hay un apoyo de neopreno.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

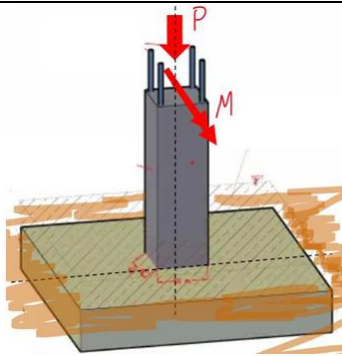
EJERCICIO 13

Una columna de concreto reforzado le transmite una carga $P = 40 \text{ (kN)}$ y un momento flector $M = 10 \text{ (kN - m)}$ a una zapata, como se muestra en la **Figura 1**. La zapata, que tiene un peso propio igual a $w_{pp} = 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, se apoya directamente sobre el suelo. Este último ejerce una reacción en forma de carga distribuida como se muestra en la **Figura 2**.

- La magnitud de la carga distribuida en los puntos A y C.
- Las ecuaciones de fuerza cortante y momento flector a lo largo de la zapata.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector a lo largo de la zapata.
- Los valores máximos (+ y -) de cortante y momento flector (+0.3).

Figura 1

Sistema columna-zapata



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

- Nota 1: La viga ABCD es continua en todos los puntos, hasta en la unión rígida de la sección transversal C.


Solución 13

Interpretando el ejercicio vemos que la zapata está siendo sometida por una fuerza externa distribuida en el eje y en toda su longitud además de la carga puntual que le trasmite la columna y el momento flector. Teniendo en cuenta lo anterior debemos hallar la reacción (distribuida) para que la zapata esté en equilibrio estático.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 1** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY debido a que está contenida la zapata y las cargas en el plano XY.

13.1. Identificación de apoyos

En la **Figura 1** se puede identificar que la reacción del suelo a la zapata se considera como distribuida. Generando una zapata que está completamente restringida para volcamiento (momento) y asentamiento (carga puntual).

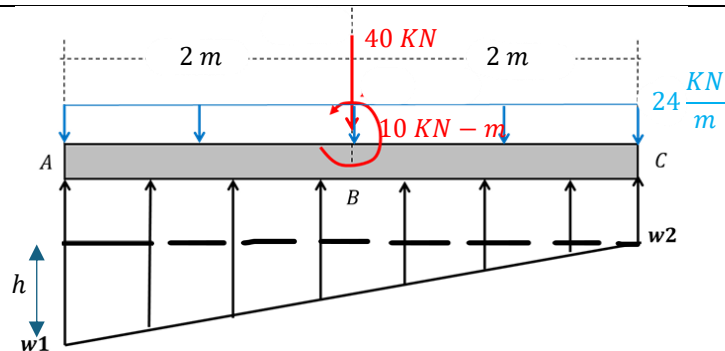
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

13.2. Realizando un DCL

Realizando un DCL de la zapata en el plano XY como se muestra en la Figura 2. Donde representaremos las cargas, distancias y reacciones de nuestra zapata en estudio.

Figura 2

DCL zapata AC



Nota. Autoría propia.

13.3. Hallando ecuaciones de carga

Como se observa en la **Figura 1** debemos hallar las ecuaciones que me describan cada una de las reacciones de la viga.

$$W_1(x) = W_2(x) + h$$

13.4. Hallando carga puntual y su ubicación

Para puntualizar las cargas distribuidas sabemos que se hace por medio de sus áreas y teniendo en cuenta que las cargas se ubicarán en su centroide. Obtenemos lo siguiente:

Puntual de $W_2(x)$

$$P_{w2} = \int_0^4 W_2(x) dx \text{ ó } W_2(x) \times 4 = W_2(x) \times 4 \uparrow$$

Ubicación de $W_2(x)$


$$X_2 = \frac{\int_0^4 (W_2(x)) x dx}{\int_0^4 W_2(x) dx} \text{ ó } \frac{4m}{2} = 2m$$

Puntual de h

$$P_h = \frac{4m \times h}{2} = 2 \times h \text{ KN} \uparrow$$

Ubicación de h

$$X_h = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} m$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Puntual de peso propio

$$P_{pp} = \int_0^4 24 \, dx \text{ ó } 24 \frac{KN}{m} \times 4m = 96 \, KN \quad \downarrow$$

Ubicación de peso propio

$$X_{pp} = \frac{\int_0^4 (24)x \, dx}{\int_0^4 24 \, dx} \text{ ó } \frac{4m}{2} = 2 \, m$$

13.5. Realizando equilibrio para hallar reacciones

Cómo ya se tiene las puntuales de carga y sus puntos de aplicación, procedemos a realizar equilibrio estático en 2D para la zapata de estudio. Donde realizaremos momentos en el punto más crítico, en este caso es el B ya que tiene varios puntos de aplicación de las reacciones y cargas externas. Además, tendremos en cuenta que para nosotros los momentos son negativos en sentido horario y positivos cuando son antihorarios.

$$\begin{aligned} \sum M_{z_B} &= 0 \rightarrow 10 \, KN - m - 2 \times h \times (2m - \frac{4m}{3}) = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow W_2(x) \times 4 + 2 \times h - 96 \, KN - 40 \, KN = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2x2 que nos queda finalmente.

$$\begin{aligned} h &= 7.5 \frac{KN}{m} \quad \uparrow \\ W_2(x) &= 30.25 \frac{KN}{m} \quad \uparrow \end{aligned}$$

Finalmente hallando $W_1(x)$

$$W_1(x) = 30.25 \frac{KN}{m} + 7.5 \frac{KN}{m} = 37.75 \frac{KN}{m}$$

13.6. Hallamos fuerzas internas

Para hallar las fuerzas internas sabemos que existen tres métodos muy comunes los cuales son integrales, cortes y áreas. En este ejercicio usaremos integrales, teniendo en cuenta que este método lo debemos desarrollar siempre de manera lineal. Es decir, siempre debe seguir la misma secuencia en los tramos (todos los tramos la “x” avanza de izquierda a derecha o viceversa).

Primero debemos identificar cuantos tramos debemos analizar para poder realizar el DFC y DMF. Para esto debemos tener en cuenta que cada tramo se acaba cuando tenemos cambio de carga externa o cambio en las propiedades o secciones de nuestro elemento estructural a analizar. Es por esto que en la Figura 3 se evidencia los tramos a analizar partiendo del DCL con todas sus cargas y reacciones conocidas.


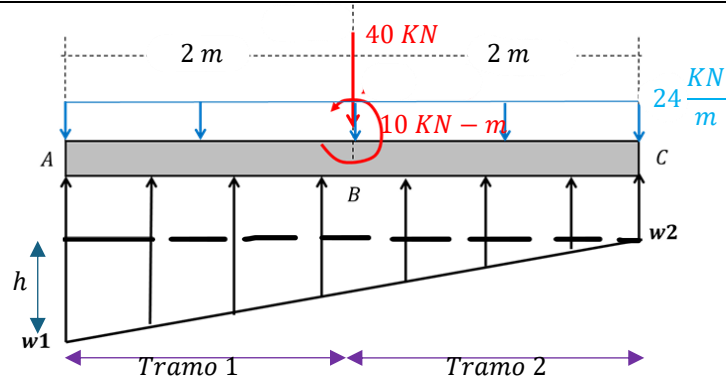
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 3

DCL zapata AC con Tramos



Nota. Autoría propia.

13.6. Hallamos fuerzas internas

TRAMO AB $0 \leq x \leq 2m$

$$V_{AB}(x) = - \int 24 - \left(-\frac{7.5}{4}x + 37.75 \right) dx$$

$$V_{AB}(x) = -\frac{7.5}{8}x^2 + 13.75x$$

$$V_{AB}(0) = 0 \text{ KN} \quad V_{AB}(2) = 23.75 \text{ KN}$$

$$M_{AB}(x) = \int -\frac{7.5}{8}x^2 + 13.75x dx$$

$$M_{AB}(x) = -\frac{7.5}{24}x^3 + \frac{13.75x^2}{2}$$

$$M_{AB}(0) = 0 \quad M_{AB}(2) = 25 \text{ KN} - m$$

TRAMO BC $0 \leq x \leq 2m$

$$w(2) = -\frac{7.5}{4}(2) + 37.75 = 34$$

$$V_{BC}(x) = - \int 24 - \left(-\frac{7.5}{4}x + 34 \right) dx + (-40) + 23.75$$


$$V_{BC}(x) = -\frac{7.5}{8}x^2 + 10x - 16.25$$

$$V_{BC}(0) = -16.25 \text{ KN} \quad V_{BC}(2) = 0 \text{ KN}$$

$$M_{BC}(x) = \int -\frac{7.5}{8}x^2 + 10x - 16.25 dx - (10) + 25$$

$$M_{BC}(x) = -\frac{7.5}{24}x^3 + \frac{10x^2}{2} - 16.25x + 15$$

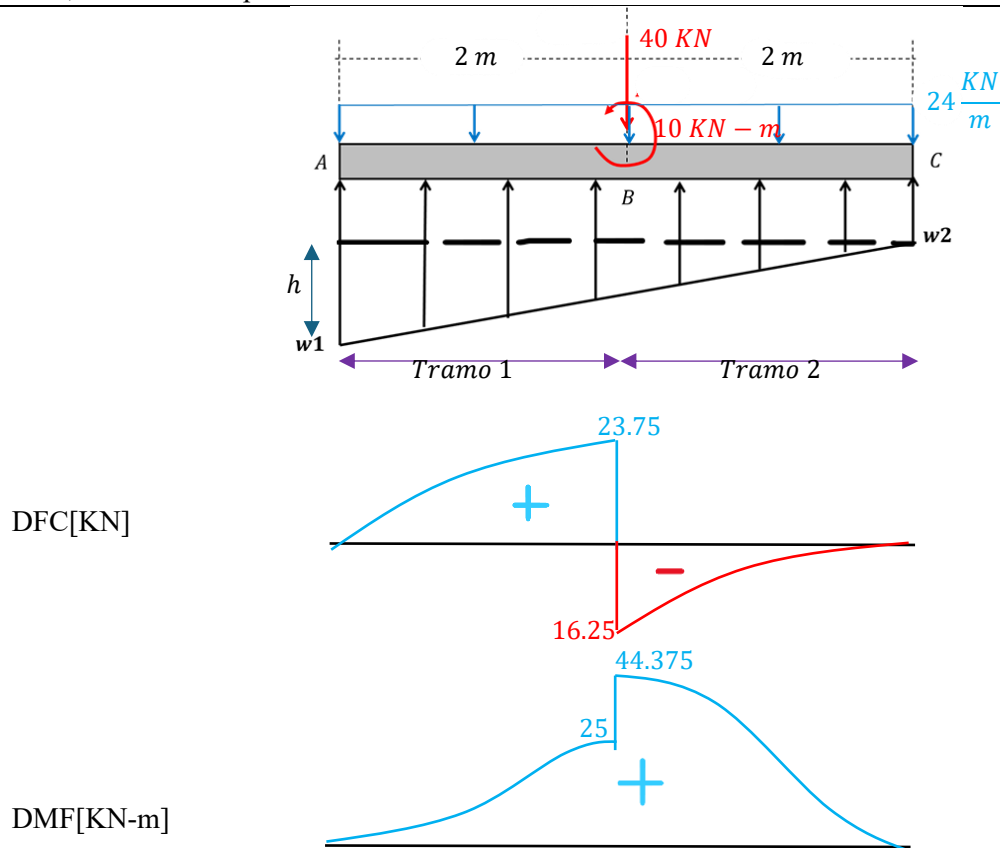
$$M_{BC}(0) = 44.375 \text{ KN} - m \quad M_{BC}(2) = 0 \text{ KN} - m$$

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		


13.7. Hacemos DFC y DMF

Figura 4

DFC, DMF de la zapata



Nota. Autoría propia.

 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

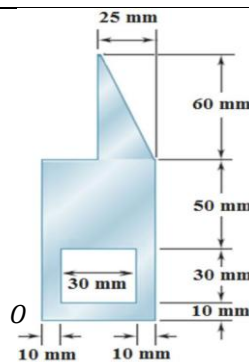
EJERCICIO 14

Para la sección compuesta mostrada en la Figura 1 determine respecto al eje centroidal lo siguiente:

- d) Momentos de Inercia rectangulares con respecto a los ejes centroidales en X y Y.
- e) El producto de inercia centroidal (I_{xy})
- f) Momento polar de inercia J_o

Figura 1

Sección para analizar



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

Solución 14

Interpretando el ejercicio vemos que se trata de una sección transversal de un elemento estructural la cual es una sección compuesta. Por ende, debemos hallar cada uno de los ítems desde el punto de referencia O.

14.1 Hallamos centroides (\bar{x} , \bar{y})

Para hallar el centroide en cada uno de los ejes debemos primero saber el área de cada figura que compone nuestra sección transversal donde los huecos tendrán área negativa. Además de lo anterior necesitaremos los centroides de cada una de las figuras medidas desde el eje “o” mostrado en la **figura 2**.

Es por esto por lo que vamos a hallar el centroide de la figura compuesta como ya sabemos hacerlo teniendo en cuenta que tenemos tres figuras que componen nuestra sección transversal como se muestra a continuación:

$$\bar{x} = \frac{(50\text{mm} \times 90\text{mm}) \times \frac{50\text{mm}}{2} + \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} \times \left(25\text{mm} + \frac{25\text{mm}}{3}\right) - (30\text{mm} \times 30\text{mm}) \times \left(10\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{2}\right)}{(50\text{mm} \times 90\text{mm}) + \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} - (30\text{mm} \times 30\text{mm})}$$

$$\bar{x} = 26.44 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{(50\text{mm} \times 90\text{mm}) \times \frac{90\text{mm}}{2} + \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} \times \left(90\text{mm} + \frac{60\text{mm}}{3}\right) - (30\text{mm} \times 30\text{mm}) \times \left(10\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{2}\right)}{(50\text{mm} \times 90\text{mm}) + \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} - (30\text{mm} \times 30\text{mm})}$$

$$\bar{y} = 60.34 \text{ mm}$$


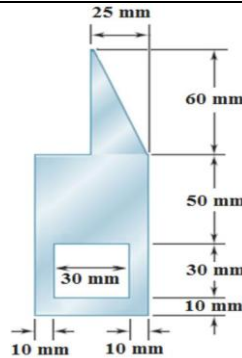
 MEMORIA DE CÁLCULO	TRABAJO#	2	FECHA	21/10/2024
	ENTREGADO A			
	ASIGNATURA	Estática		
	TEMA	Inercias, centroides, DFC, DMF, DFA, etc.		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Figura 2

Centroides de la sección



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

14.2 Hallamos Momentos de inercia (\bar{I}_x, \bar{I}_y)

Como debemos hallar los momentos de inercia de nuestra sección debemos tener en cuenta las fórmulas de inercias centroidales de cada figura que conforma la sección, los centroides hallados en el inciso anterior y el teorema de Steiner debido a que nuestra sección se compone de varias figuras de diferente geometría unidas. Por último, cabe resaltar que el momento de inercias en “x” usa distancias en “y” y viceversa.

$$\bar{I}_x = \frac{50\text{mm} \times (90\text{mm})^3}{12} + (50\text{mm} \times 90\text{mm}) \times \left[\frac{90\text{mm}}{2} - 60.34\text{mm} \right]^2 + \frac{25\text{mm} \times (60\text{mm})^3}{36} + \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} \times \left[\left(90\text{mm} + \frac{60\text{mm}}{3} \right) - 60.34\text{mm} \right]^2 - \frac{30\text{mm} \times (30\text{mm})^3}{12} - (30\text{mm} \times 30\text{mm}) \times \left[\left(10\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{2} \right) - 60.34\text{mm} \right]^2$$

$$\bar{I}_x = 4.904 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{90\text{mm} \times (50\text{mm})^3}{12} + (50\text{mm} \times 90\text{mm}) \times \left[\frac{50\text{mm}}{2} - 26.44\text{mm} \right]^2 + \frac{60\text{mm} \times (25\text{mm})^3}{36} + \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} \times \left[\left(25\text{mm} + \frac{25\text{mm}}{3} \right) - 26.44\text{mm} \right]^2 - \frac{30\text{mm} \times (30\text{mm})^3}{12} - (30\text{mm} \times 30\text{mm}) \times \left[\left(10\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{2} \right) - 26.44\text{mm} \right]^2$$

$$\bar{I}_y = 939.145 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Producto de inercias (\bar{I}_{xy})

$$\bar{I}_{xy} = 0 \text{ mm}^4 + \left(\frac{90\text{mm}}{2} - 60.34\text{mm} \right) \times \left(\frac{50\text{mm}}{2} - 26.44\text{mm} \right) \times (50\text{mm} \times 90\text{mm}) - \frac{(25\text{mm})^2 \times (60\text{mm})^2}{72} + \left(\left(90\text{mm} + \frac{60\text{mm}}{3} \right) - 60.34\text{mm} \right) \times \left(\left(25\text{mm} + \frac{25\text{mm}}{3} \right) - 26.44\text{mm} \right) \times \frac{25\text{mm} \times 60\text{mm}}{2} + 0 \text{ mm}^4 + \left[\left(10\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{2} \right) - 60.34\text{mm} \right] \times \left[\left(10\text{mm} + \frac{30\text{mm}}{2} \right) - 26.44\text{mm} \right] \times -(30\text{mm} \times 30\text{mm})$$

$$\bar{I}_{xy} = 279.094 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Momento Polar de inercia (J)

$$J = \bar{I}_x + \bar{I}_y$$

$$J = 4904482.86 \text{ mm}^4 + 939145.16 \text{ mm}^4$$

$$J = 5.843 \times 10^6 \text{ mm}^4$$